ACTIVIDADES CON MEDIOS DINÁMICOS PARA EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LOS CONTENIDOS GEOMÉTRICOS

ACTIVITIES WITH DYNAMIC AIDS FOR THE TEACHING-LEARNING PROCESS OF GEOMETRIC CONTENTS

Henry Fernández Rodríguez[1] (henryfr@ult.edu.cu)

Michel Enrique Gamboa Graus[2] (michelgamboagraus@gmail.com)

RESUMEN

El trabajo presenta resultados del proyecto de investigación “Didáctica de las Ciencias Exactas” de la Universidad de Las Tunas, en colaboración con uno de los proyectos de la Red de Estudios sobre Educación (REED). El artículo responde al objetivo del proyecto: perfeccionar los medios de enseñanza-aprendizaje a partir de los asistentes matemáticos, para potenciar su empleo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos en función de una educación equitativa, inclusiva y de calidad. Al respecto se resaltan insuficiencias, la elaboración de medios dinámicos acordes con el desarrollo tecnológico disponible, recomendaciones metodológicas a los profesores y actividades con un programa computarizado de aplicación como es el Geogebra. Se refleja la implementación en el centro de referencia provincial de Educación Secundaria, donde se comprobó que de esta forma se producen favorables cambios actitudinales de los estudiantes hacia la asignatura y mejoras significativas en su aprendizaje.

PALABRAS CLAVE: Geometría; enseñanza; aprendizaje; actividades.

ABSTRACT

The work presents results of the research project "Didactics of Exact Sciences" of the University of Las Tunas, in collaboration with one of the projects of the Network of Studies on Education (REED). The article responds to the objective of the project: to improve the means of teaching and learning from the mathematical assistants, to enhance their use in the teaching-learning process of geometric contents based on equitable, inclusive and quality education. In this regard, we highlight shortcomings, the development of dynamic means in accordance with the available technological development, methodological recommendations to teachers and activities with a computerized application program such as Geogebra. The implementation in the provincial reference center of Secondary Education is reflected, where it was verified that in this way favorable changes of the students towards the subject take place and significant improvements in their learning.

[1] Licenciado en Educación, especialidad Matemática-Computación. Profesor Auxiliar de Geometría en el Departamento de Matemática-Física de la Facultad de Ciencias de la Educación Media. Universidad de Las Tunas, Cuba.

[2] Licenciado en Educación, especialidad Matemática-Computación. Doctor en Ciencias Pedagógicas. Profesor Titular. Coordinador de Investigaciones del Centro de Estudios Pedagógicos de la Universidad de Las Tunas, Cuba.

KEYWORDS: Geometry; teaching; learning; activities

Las escuelas contemporáneas se dotan de nuevas tecnologías, entre ellas las computadoras, por lo que constituye un reto su utilización en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En la Geometría es uno de los procesos que presenta mayores dificultades en la Matemática Educativa actual. Relacionadas, fundamentalmente, con la actualización didáctica necesaria para hacerlo corresponder con los adelantos tecnológicos existentes en campos como la Informática y la Comunicación.

En tal escenario nuestro país está inmerso en la realización de profundas transformaciones con la finalidad de hacer corresponder el modelo de hombre que ella necesita con el sistema social que construimos, de manera tal que éste pueda vivir en un mundo donde el inevitable proceso de globalización impone nuevos retos dados por el desarrollo de la ciencia, la técnica y las comunicaciones. Estas transformaciones en el sector educacional se reconocen en Cuba como la tercera gran Revolución educacional y cultural.

La introducción de las computadoras personales y de programas de computación para la enseñanza hacen que surjan interrogantes, tanto por parte de los docentes, que deben implementar su uso al desarrollar el currículum diseñado, como por los estudiantes que deben utilizarlos; esto se da en las diferentes asignaturas y áreas del conocimiento del que no escapa la enseñanza de la Matemática y en particular de la Geometría.

Es necesario que se modifique la concepción tanto de la enseñanza como del aprendizaje de la Geometría. Esto implica un cambio en la manera de pensar de los profesores y desde luego de diseñar las estrategias, las tareas independientes y actividades extra-docentes. Esto debe hacerse de manera que exista, en dependencia de las condiciones concretas de escuela, alumnos y propias de la comunidad, la coherencia necesaria para el éxito del proceso y que propicie un cambio en los modos de actuación de los estudiantes hacia el aprendizaje y los hábitos de estudio.

La investigación se basó en la enseñanza de los contenidos geométricos en la Educación Secundaria. Al respecto se resaltan varias insuficiencias que se manifiestan, entre ellas están las siguientes:

- Insuficiente uso de medios de enseñanza-aprendizaje.
- Limitaciones, por parte de los docentes, en el conocimiento de las potencialidades de los recursos informáticos.
- Escasa disponibilidad de medios de enseñanza-aprendizaje en correspondencia con desarrollo tecnológico existente.

Estas manifestaciones revelan una contradicción entre las exigencias que establecen los objetivos del modelo del nivel educacional y la realidad existente. Esto es así en cuanto a la dirección del proceso pedagógico, donde se tiene en cuenta la creatividad en la utilización de los recursos pedagógicos para la formación de los estudiantes, de manera que se potencie su aprendizaje, así como su desarrollo personal en el orden intelectual, afectivo, moral, político y social. En contraposición, el estado real que presenta el uso de los medios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos limita el logro de tales exigencias.

El objetivo fundamental de este trabajo se enfoca en contribuir a eliminar las insuficiencias que se presentan en el uso de los medios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos. Se espera sugerir, a los profesores, recursos que les permitan realzar su creatividad al mostrar algunas de las posibilidades de utilización de las tecnologías de la Informática en función de promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos mediante una educación para el desarrollo de los involucrados y la valoración de la diversidad. Para ello se diseñaron actividades teniendo presente los principios de una didáctica desarrolladora y los niveles de pensamiento en esta área de la Matemática, los cuales evidencian en la práctica el cambio de actitud de los estudiantes hacia la asignatura.

Fundamentos teóricos

Este trabajo parte del Enfoque Histórico Cultural, de manera general. De tal forma se resaltan los aspectos referentes a la necesidad del aprendizaje cooperativo o colaborativo a partir del reconocimiento del componente social del aprendizaje, del aprender con otros y de otros que en la psicología social se conocen como Zona de Desarrollo Próximo (ZDP). Este supuesto permite valorar desde perspectivas educativas, el trabajo que desempeña un sujeto con otros a favor de un aprendizaje determinado, la importancia que se le asigna al compartir con otros abre nuevos caminos para generar estrategias de enseñanza-aprendizaje centradas en el crecimiento colectivo.

En la propuesta se toma en consideración la formación por etapas de las acciones mentales desarrolladas por Galperin. Al respecto, “las verbalizaciones no solo constituyen un medio de información, sino que también son una acción de nuevo tipo, propiamente en forma verbal” (Fernández y Alfonso, 2014, p. 4). Esto “promueve clases en las que los estudiantes ofrecen y reciben ayudas entre ellos, en función de sus diferentes zonas de desarrollo próximo” (Joaquim, Gamboa y Fonseca, 2017, p. 30). En tal sentido, los conocimientos asimilados exhiben un proceso de conversión gradual de acciones externas a acciones intelectuales internas, a través de las etapas en la que la comunicación con otros es esencial.

Igualmente, la propuesta que aquí se presenta se nutre de elementos de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) para el diseño y análisis de la secuencia didáctica y de la Orquestación Instrumental. En tal sentido se considera la “adaptación, implementación y análisis de secuencias didácticas en GeoGebra” (Llantén y Bermúdez, 2014, p. 20) para el estudio de la semejanza de triángulos con estudiantes de octavo grado de la Educación Básica.

En este trabajo se presentan tres fases en las que se toma como eje central las fases de acción, formulación y validación planteadas desde la TSD y se resalta la gestión didáctica del profesor en el desarrollo de la secuencia didáctica. Al respecto, se consideraron criterios de propuestas como Oliveras y Godino (2015), Rojas (2015), Fuentes, Piedra y Hernández (2016), Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2016), Montoya y Lezama (2016), Ramos y Font (2016), y otros también desde el Enfoque Ontosemiótico.

El método de interconexión significativa para el desarrollo de la resolución de problemas geométricos también se encuentra guiando esta propuesta. En tal sentido, este "relaciona los cuatro componentes que aporta Schoenfeld, recursos, heurística, control y sistema de creencias, para a partir de estos poder desarrollar la resolución de problemas geométricos" (Carmenates, Rodríguez y Gamboa, 2014, p. 18). Así se potencia que los estudiantes interactúen con los problemas geométricos con los recursos tecnológicos que poseen. Al respecto, se profundiza con investigaciones como Fonseca y Gamboa (2010), Fernández, Gamboa, Rodríguez y Alfonso (2016), Santos, Gamboa y Silva (2017), entre otros.

También se toma como base el trabajo con los tipos de tareas de trabajo independiente como "la elaboración de resúmenes, cuadros sinópticos y esquemas conceptuales, ejercicios donde puedan experimentar las posibles soluciones con los diferentes asistentes matemáticos y establecer conjeturas al respecto" (Zaldivar, Cruz y Gamboa, 2015, p. 58). Estas aparecen indistintamente en el sistema de actividades que proponen utilizar tales autores para sistematizar los conceptos con el uso de las tecnologías de la Informática y la Comunicación.

En tal sentido se precisa organizar el proceso de enseñanza-aprendizaje hacia la búsqueda activa del conocimiento por el alumno. Para ello se hace necesario concebir actividades desde posiciones reflexivas que estimulen el desarrollo del pensamiento y la independencia. Al mismo tiempo, se debe fomentar formas de actividad y de comunicación colectivas, estimulando la valoración y la interacción de lo individual con lo colectivo.

Se conoce, además, que uno de los objetivos de la Matemática Educativa está dirigido al desarrollo del pensamiento lógico en los estudiantes. En particular la Geometría posee potencialidades inigualables para contribuir al cumplimiento del mismo, muy especialmente si se tienen presentes al diagnosticar y diseñar las estrategias los niveles de Van Hiele del desarrollo del pensamiento geométrico con sus fases. Al respecto, este "es un modelo de enseñanza y aprendizaje que brinda la posibilidad de identificar las formas de razonamiento geométrico y pautas a seguir para fomentar la consecución de niveles más altos de razonamiento" (Vargas y Gamboa, 2013, p. 91). En este sentido, también se considera el nivel de actualización que sobre estos niveles se encuentran en investigaciones de autores como Fabres (2016), Londoño, Zaldívar y Montes (2016), entre otros.

Existen tres características de las computadoras que poseen gran importancia desde el punto de vista didáctico, las cuales deben ser valoradas por el profesor para decidir su utilización como recurso en el desarrollo del currículum. Por una parte, estas proporcionan una forma cómoda de gestionar y representar la información, permitiendo que el alumno dedique mayor atención al sentido de los datos y al análisis de los resultados. Otra de las posibilidades es de ejecutar con gran rapidez dibujos, cálculos, entre otras órdenes de muy distinto tipo, por lo que se pueden simular experiencias aleatorias, trazar gráficos, entre otras actividades. La tercera característica es la de interactuar con el estudiante, que puede intervenir en determinados momentos proponiendo datos o tareas nuevas en función de los resultados que se van obteniendo, convirtiéndose en un poderoso instrumento de exploración e indagación, todo lo cual hace que su uso sea altamente motivante.

El profesor debe valorar el tiempo que se necesita para el uso de asistentes matemáticos como el que se emplea en esta propuesta o de otros como el Geómetra. Al mismo tiempo debe considerar en qué actividades utilizarlos de manera que se facilite la calidad del aprendizaje, lo que incluye el manejo por los estudiantes de dichos asistentes. Esto además debe hacerse desde con un análisis de las potencialidades y carencias que estos poseen para lograr los objetivos trazados, ya sea en la clase o de apoyo a ella.

Como parte del proyecto de investigación sobre el aprendizaje que se desarrolla en la provincia, del que forman parte los autores, se concibió la instrumentación de situaciones de aprendizaje para adolescentes del 7mo grado de la Educación Secundaria. Estas tomaron en consideración de forma dialéctica los elementos que aportan estas teorías que se trataron, unidos a los de investigaciones desarrolladas por Ballester (2013), Gamboa y Fonseca (2014), Coloma (2015), y otros que aportan elementos para elevar la calidad del aprendizaje al integrar las TIC a la enseñanza-aprendizaje. Igualmente, “se sustenta en el establecimiento de relaciones interdominios e intradominios cognitivos de la Matemática” (Alfonso e Izquierdo, 2013, p. 1). De esta manera se buscó elevar el grado de efectividad del aprendizaje aspirado por el modelo del egresado de este nivel educacional.

Propuesta realizada

Para el logro del propósito del trabajo se utilizó el GeoGebra como programa computarizado disponible. El mismo brinda un potencial extraordinario y posibilita transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría en favor de lograr resultados más efectivos. El programa se caracteriza por su versatilidad y fácil uso, además por interactuar de una forma dinámica con los objetos geométricos, lo cual propicia a los alumnos experiencias de las que antes no disponían. Además, este es un software matemático interactivo libre que permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y otras bondades muy útiles para el trabajo educativo. Esto genera actividades, ejercicios y problemas más desarrolladores, diferentes a los usuales con lápiz y papel.

La utilización de la computación en la exploración de los objetos geométricos, por parte de los alumnos, permite que estos formulen conjeturas para analizar la variación o no de propiedades y relaciones al modificarlas, obtener ideas para argumentar su validez, entre otras cuestiones. Esto además favorece la comunicación y sus descubrimientos y que sistematicen constantemente sus conocimientos, lo que hace que se desarrolle su pensamiento matemático ya que se acercan al quehacer propio de los matemáticos.

Este proceso requirió el planteamiento y desarrollo de una serie de acciones que posibilitaron concretar las ideas teóricas. Las mismas se listan a continuación.

Acciones para crear las condiciones necesarias

La implementación de las actividades consistió en el proceso de ponerlas en funcionamiento en la práctica escolar, la aplicación de métodos, el diseño de acciones, la toma de decisiones y medidas para llevarlas a cabo exitosamente a través de varios momentos. Estos incluyeron la selección de los profesores, el diseño de acciones de preparación para crear las condiciones necesarias, entre otros como evaluación y perfeccionamiento de las propuestas. Algunas de las acciones implementadas se tratan a continuación.

- Preparar, tanto en la teoría como en la práctica, a los profesores en los presupuestos antes expresados.

Esto se hizo a través de talleres y sesiones de debates sobre los diferentes aspectos de la preparación. Estos contaron con diferentes técnicas participativas, estudio previo de materiales, exposición de la interpretación de los mismos, entre otras características.

- Instalar los programas computarizados.

Se instalaron en los laboratorios de Informática tanto el Geogebra como el Geómetra para ir generalizando las acciones a diversos asistentes matemáticos.

- Desarrollar sesiones de trabajo para revisar las cualidades y potencialidades de los dos programas.

Por presiones con el tiempo fue imposible agotar esta, de manera que quedó como trabajo individual profundizar en este sentido. Sin embargo es necesario tratar de hacerlo de manera presencial utilizando formas típicas de exposición, ejemplificación e ilustración para mostrar cualidades como la interactividad, flexibilidad, extensibilidad, y transposición didáctica que caracterizan la dinámica que adquiere el proceso en que participen estas tecnologías.

- Analizar la unidad que se quiera abordar.

Se trabajó en la unidad de Geometría del 7mo grado. Se revisaron, entonces, los documentos que recogen orientaciones metodológicas al respecto, de manera que facilitara la obtención de ideas relacionadas con el empleo de las cualidades y potencialidades del programa computarizado.

- Valorar los resultados del diagnóstico integral aplicado por los profesores.

Aquí se tuvo en cuenta su evolución en lo que iba de curso y en particular de la unidad, así como de las experiencias de los profesores al impartir estos contenidos. Además, se consideraron las condiciones reales de utilización de los laboratorios de computación por los estudiantes y profesores.

- Diseñar las actividades por desarrollar.

Esto se hizo de manera que se tuvieran presentes los presupuestos teóricos de base.

- Realizar sesiones de trabajo con los alumnos en el laboratorio de computación.

Esto fue crucial para enseñarlos a interactuar con los programas, a la vez que se diagnosticaban los conocimientos de los alumnos sobre los principales conceptos de los entes y figuras que serían objeto de estudio. La intención es que todos sean capaces de llegar a estos niveles en que, además de su pensamiento, utilizan herramientas acordes al desarrollo tecnológico existente para la solución de los problemas.

- Implementar las actividades diseñadas.

El trabajo en colectivo para establecer cómo concebir el desarrollo de las actividades propició sugerir las siguientes orientaciones metodológicas:

Orientaciones metodológicas para ejecutar las actividades

Acorde con las actividades se sugiere la formación de equipos de tres o cuatro alumnos de manera que se puedan distribuir las tareas para los diferentes casos, según el diagnóstico, complejidad de las actividades y el tiempo disponible para su ejecución, así como realizar oponencias del trabajo de un equipo a otro. Lo que se busca es garantizar un proceso didáctico que promueva el ejercicio de la comunicación, la interacción y la crítica sobre las propias soluciones, como condición necesaria para un aprendizaje desarrollador.

La orientación constituye un momento importante para el éxito del aprendizaje, el profesor debe quedar bien seguro que los alumnos han comprendido qué deben hacer, por lo que el control de la asimilación de las orientaciones dadas es indispensable. Aquí es importante que se valore el dominio de los conceptos implícitos necesarios para enfrentar cada actividad, de no dominarse se recomienda la búsqueda de los mismos por diferentes vías.

Se deben concebir sesiones de trabajo donde se socialicen los procesos empleados para llegar a los resultados, así como los propios resultados. De tal forma es posible dar seguimiento individual y colectivo a los estudiantes en su aprendizaje. Además, esto contribuye a que se eduquen en ejercer la crítica y la autocrítica, el establecimiento de juicios de valor, se autoevalúen y coevalúen, además de entrenarse en el uso del vocabulario técnico de la asignatura. Es recomendable utilizar la opción "Histórico" lo que posibilitará describir el procedimiento seguido, que servirá también como controlador del mismo.

Las actividades deben ser combinadas con las consultas y estudios de los aspectos teóricos que aparecen en las enciclopedias del programa Libertad y en soporte electrónico Encarta, Ecured, Wikipedia, con que se cuenta en las escuelas, además de los libros; donde tengan que elaborar resúmenes y fichas de contenido. Estos pueden anteceder o no la actividad asignada según sea el caso. Se sugiere que realicen tablas para sus anotaciones, las que les facilitarán el análisis de la información.

Es recomendable implicar al estudiante en la elaboración de sus propias macro construcciones, que le facilitarían su propio estudio individual y reforzaría la solidez del aprendizaje.

El planteamiento de las actividades debe de tener presente los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico (reconocimiento, análisis, clasificación, deducción formal y rigor) con sus fases (información, orientación dirigida, explicación, orientación libre e integración) y la formación por etapas de las acciones mentales (Elaboración de la

BOA de tercer tipo, formación de la acción de forma material, formación de la acción como verbal externa y formación de la acción en el lenguaje interno).

Ejemplos de actividades diseñadas

Para sistematizar algunos de los axiomas de incidencia.

1. a) Traza dos puntos diferentes (Figura 1). b) Construye una recta que pase por estos dos puntos. c) Construye otra recta distinta a la anterior que pase por estos dos puntos. ¿Es posible? ¿A qué conclusión llegas?

Figura 2: Recta por dos puntos.

2. a) Traza un punto y denótalo (Figura 2). b) Traza una recta que pase por el punto anteriormente trazado. (NOTA: Recuerda que las rectas deben trazarse a partir de dos puntos diferentes). c) Traza varias rectas que pasen por dicho punto. d) ¿Cuántas rectas será posible trazar que pasen por un punto? Elabora una proposición que exprese la conclusión a la que arribas.

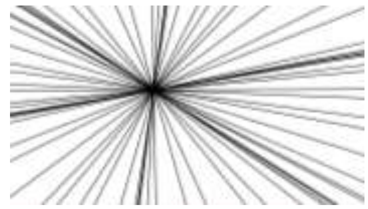
Figura 1: Infinitas rectas por un punto.

Puedes comprobar los casos anteriores a través del doblado de papel, siguiendo un procedimiento similar, lo único que tendrás es que doblar el papel tantas veces de manera que se cumpla, pase por el (o los) puntos seleccionados. Verás que resulta interesante.

Para relaciones de ángulos entre rectas.

3. a) Traza dos rectas que se corten en un punto (Figura 3). Señaliza el punto de intersección. b) Identifica y marca los ángulos, clasifícalos en opuestos por el vértice y ángulos adyacentes. c) Mide las amplitudes de estos ángulos. Mueve por uno de los puntos las rectas. d) A partir de la observación y el análisis del comportamiento de las medidas de los pares de ángulos opuestos por el vértice y adyacentes ¿a qué conclusión llegas? ¿Qué ocurre cuando uno de los ángulos mide 90°? ¿Qué relación de posición tienen las rectas?

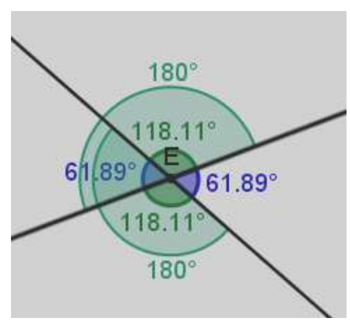

Figura 4: Ángulos entre rectas que se cortan.

Los propios estudiantes, con adecuada dirección del profesor, pueden llegar al planteamiento de conjeturas sobre las propiedades de la mediatriz de un segmento. Esta actividad, conjuntamente con la número 9, se desarrolló en Geómetra para mostrar también sus potencialidades.

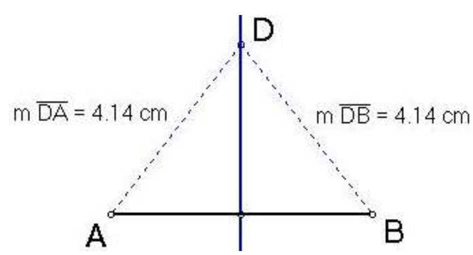

Figura 3: Mediatriz de un segmento equidista de sus extremos.

4. a) Trazar un segmento y denotar sus extremos (Figura 4). b) Traza la mediatriz de ese segmento. ¿Qué aspectos tuvieron en

cuenta para trazarla? c) Seleccionar un punto de la mediatriz de manera arbitraria. d) Medir la distancia del punto sobre la mediatriz a los extremos del segmento, desplaza dicho punto sobre la mediatriz y ve anotando la variación de las distancias, ¿Qué ocurre? ¿A qué conclusión llegas?

Luego cuando estudien los criterios de igualdad de triángulos podrán realizar una demostración de esta propiedad, apoyándose en estos criterios. Por el momento se puede realizar la búsqueda de todos los elementos iguales, tanto en el triángulo grande formado por los extremos del segmento y el punto seleccionado sobre la mediatriz, como en los dos pequeños que determina la mediatriz, reconocerlos, clasificarlos acorde con la amplitud de sus ángulos, la longitud de sus lados, de manera que se pueda ir sistematizando los conocimientos y preparando el camino para formas de pensamiento más formales. Un trabajo similar se puede realizar con la bisectriz de un ángulo.

La suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo es otra de las temáticas más ricas para realizar el planteamiento de suposiciones o conjeturas y llegar a la proposición a partir de la intuición con el apoyo de este tipo de software.

5. a) Construye un triángulo cualquiera y denótalo (Figura 5). b) Mide la amplitud de sus ángulos interiores y calcula su suma. c) Mueve dos de los vértices de manera que obtengas diferentes triángulos. d) Observa cómo varían las amplitudes de los ángulos interiores. ¿Qué sucede con la suma de dichas amplitudes? e) Valora a partir de los resultados anteriores si son posibles estos casos: tener dos ángulos obtusos, dos ángulos rectos, un ángulo obtuso y uno recto. En cada caso justificar la respuesta.

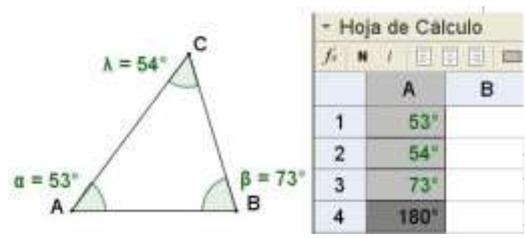

Figura 5: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°

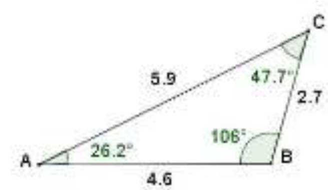

Figura 6: En un triángulo a mayor lado se le opone mayor ángulo y viceversa.

El GeoGebra, el Geómetra y otros asistentes matemáticos brindan posibilidades muy interesantes en el estudio de la relación entre los lados de un triángulo y los ángulos opuestos. A continuación se presenta un ejemplo para llegar a elaborar la proposición de que en todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

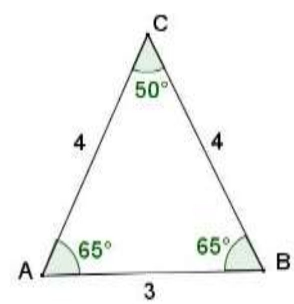

Figura 7: En un triángulo a lados iguales se oponen ángulos iguales y viceversa.

a) Traza un triángulo y denótalo (Figura 6). a) Mide sus lados y sus ángulos. b) Observa el lado de mayor longitud y compara la amplitud del ángulo que se le opone con el resto de las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ¿qué sucede? b) Observa el lado de menor longitud y compara la amplitud del ángulo que se le opone con el resto de las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ¿qué sucede? c) Mueva los vértices del triángulo y verifica si sigue cumpliéndose esa relación. ¿A qué conclusión llegas? d) Trata de lograr, moviendo dos vértices del triángulo la igualdad de dos lados (Figura 7). ¿Qué sucede con las amplitudes de los ángulos opuestos a esos lados? e) Repite la operación pero de manera que se igualen otro par de lados diferentes al caso anterior y observa qué sucede. ¿y si se igualan los tres lados qué sucede con los ángulos? g) ¿A qué conclusión llegas? (Figura 8).

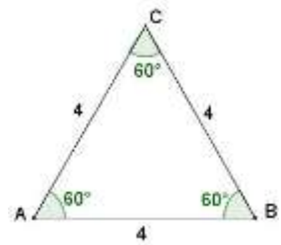

Figura 8: Un triángulo con sus tres lados iguales tiene sus tres ángulos iguales y viceversa.

Para el estudio de las rectas notables y sus propiedades.

6. Mediatriz:

a) Traza un triángulo definido por tres puntos y denótalos.

b) Traza la mediatriz de uno de los lados del triángulo. ¿Qué aspectos tuvieron en cuenta? (Recordar las propiedades y mostrar variaciones del triángulo para confirmar su generalidad).

c) Fíjate en la mediatriz trazada. ¿Pasa por el vértice opuesto al lado? (Como regularidad no lo hace)

d) Mueve dicho vértice opuesto hasta lograr que el mismo se encuentre situado sobre la mediatriz (Figura 9). ¿Es posible? ¿Qué sucede con las longitudes de los lados que conforman el vértice? ¿Qué sucede con las amplitudes de los ángulos correspondientes a los otros vértices? ¿Qué tipo de triángulo sería? (Sí es posible, y tanto las longitudes como las amplitudes son iguales porque sería un triángulo isósceles)

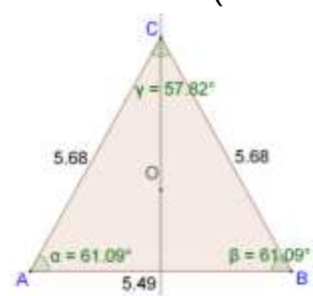

Figura 9: Mediatriz en triángulos isósceles.

e) Transforma el triángulo de manera que varíe la longitud del lado al cual se ha construido la mediatriz y se mantenga la condición dada en el inciso d). ¿A qué conclusión puedes llegar?

f) Traza la mediatriz de otro lado. ¿Qué relación de posición tienen las dos mediatrices trazadas? (Se cortan o intersecan en un punto)

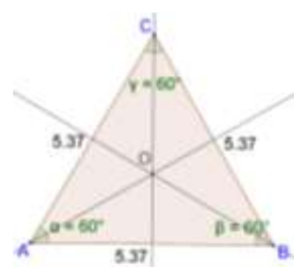

Figura 10: Las tres mediatrices del triángulo se cortan en un punto.

g) Traza la mediatriz del tercer lado (Figura 10). ¿Qué sucede con las tres mediatrices? (Se cortan o intersecan en un único punto común)

h) Transforma el triángulo en otro cualquiera, moviendo uno o dos de los vértices ¿Qué sucede con las tres mediatrices? (Se mantiene la relación de posición)

i) Si las tres mediatrices tuvieran un punto común de intersección denótalo por O. Trata de lograr que las tres mediatrices pasen por los vértices opuestos. ¿Es posible? ¿Qué ocurre con las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo? Clasifica el triángulo. (Sí es posible, y tanto las longitudes como las amplitudes son iguales porque sería un triángulo equilátero, y por tanto acutángulo)

j) Mueve los vértices del triángulo hasta lograr que los tres ángulos interiores sean diferentes. Traza los segmentos que tienen un extremo en el punto O y el otro en cada uno de los vértices del triángulo. Mide la longitud de estos segmentos. Compara estas longitudes y diga cómo son. ¿Qué puede decir del punto O y los vértices del triángulo? (Las longitudes son iguales y el punto O es equidistante de los vértices)

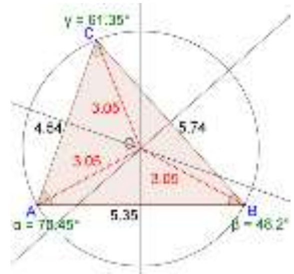

Figura 11: El circuncentro del triángulo.

k) Mueve los vértices del triángulo para ver qué pasa con la relación de los segmentos medidos en el inciso anterior. ¿Se mantiene o no? (Se mantiene)

l) Traza la circunferencia definida por el punto O como centro y cualquiera de los vértices del triángulo (Figura 11). ¿Qué sucede? ¿Cómo se llama esta circunferencia trazada con respecto al triángulo? (Como el punto O equidista de los tres vértices es el circuncentro del triángulo, es el centro de la circunferencia que pasa por los tres vértices del mismo, la que se llama circunferencia circunscrita)

Figura 14: El circuncentro en un punto interior del triángulo.

m)Mueve los vértices del triángulo. ¿Se mantiene la relación de posición entre estos y la circunferencia trazada? (Se mantiene)

n) Mueve los vértices del triángulo hasta que el punto O sea: interior al triángulo (Figura 12); exterior al mismo (Figura 13); esté sobre uno de sus lados (Figura 14). ¿Es posible? ¿Qué sucede en cada caso? ¿En el tercer caso qué amplitud tiene el ángulo opuesto a este lado? ¿Qué generalidad puedes verificar con respecto a la clasificación del triángulo teniendo en cuenta la amplitud de sus ángulos? (Sí es posible en cada caso y en el tercero se verifica el teorema de Thales. Como generalidad el triángulo es acutángulo, obtusángulo o rectángulo si el circuncentro es respectivamente un punto interior, exterior o está sobre uno de sus lados)

Figura 12: El circuncentro en un punto exterior del triángulo.

o) ¿Con todo el trabajo realizado hasta aquí a qué conclusiones llegan?

Figura 13: El circuncentro sobre un lado del triángulo.

Otras interrogantes posibles serían: ¿Puede una mediatriz coincidir con alguno de los lados del triángulo? ¿Es siempre el circuncentro de un triángulo un punto interior de dicho triángulo? ¿Puede coincidir con alguno de sus vértices? ¿Puede estar situado en alguno de sus lados? Si el circuncentro está en un lado del triángulo ¿cómo se clasifica el triángulo atendiendo a la amplitud de sus ángulos? ¿y atendiendo a la longitud de sus lados?

De manera similar se pueden realizar para el resto de las rectas notables con la adecuación a las características de cada una.

Para realizar el planteamiento de suposiciones o conjeturas y llegar a la proposición a partir de la intuición, sobre la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de un cuadrilátero convexo.

7. a) Traza un cuadrilátero convexo cualquiera y denótalo (Figura 15). b) Mide las amplitudes de sus ángulos. c) Determina la suma de las amplitudes de sus ángulos. d) Transforma el cuadrilátero construido, moviendo dos o tres vértices, en los diferentes tipos de cuadriláteros que conoces. e) Anota cómo se comporta la suma de las amplitudes de los ángulos interiores. ¿A qué conclusiones llegas?

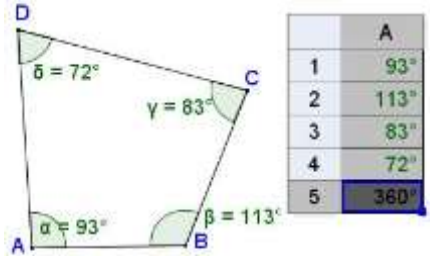

Figura 16: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 360°.

Al abordar algunas de las propiedades del paralelogramo se diseñó la siguiente actividad.

8. a) Construye un paralelogramo y denota sus vértices. b) Traza las diagonales del mismo y determina la longitud de estas y la amplitud del ángulo agudo que se forma entre ellas. c) A partir del movimiento de tres vértices transforma el paralelogramo dado en: Rectángulos de diferentes tamaños. Cuadrados de diferentes tamaños (Figura 16). En rombos de diferentes tamaños. d) Anota en cada caso, según la tabla sugerida, el valor de las longitudes de las diagonales y la amplitud del ángulo que ellas forman, realiza un análisis de las anotaciones realizadas. ¿Qué puedes decir en cada caso?

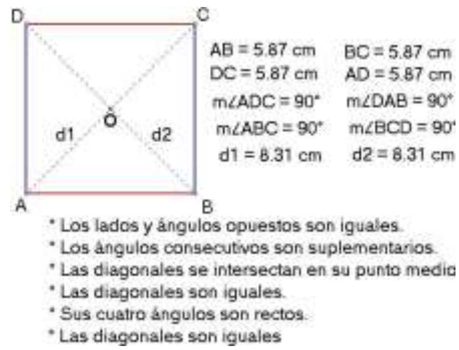

Figura 15: Propiedades de un cuadrado.

En cada caso se les debe solicitar a los estudiantes que realicen búsquedas en la bibliografía orientada de proposiciones o propiedades similares o iguales a las que ellos han elaborado. Al mismo tiempo, es imprescindible que estos compartan con los compañeros sus resultados y elaboren proposiciones. Con esto se potencia la etapa verbal, para que los estudiantes interactúen entre ellos y puedan transitar el camino del pensamiento que les permite su entendimiento de los conceptos geométricos a las palabras que deben ofrecer para explicar los rasgos y propiedades a sus compañeros o al profesor, como uno de los factores determinantes en el desarrollo individual de cada uno de ellos, de manera que les permita internalizar dichos conceptos y aplicarlos a lo largo de sus vidas.

Como consecuencia, la base del aprendizaje de los estudiantes no es la simple observación o escuchar la información sobre el tema. Las relaciones, enlaces y procedimientos entre los elementos que componen el contenido de los conceptos involucrados se convierten en una condición necesaria para la acción mental. Se propone estimular la gradual, paulatina y en ocasiones imperceptible conversión de acciones externas a acciones intelectuales internas, y esto es creado en un proceso que ocurre poco a poco en la interacción entre los estudiantes y profesores, con múltiples situaciones de aprendizaje que contengan ejercicios, problemas y actividades. Lo que se busca es garantizar un proceso didáctico que promueva el ejercicio de la comunicación, la interacción y la crítica sobre las propias soluciones, como condición necesaria para un aprendizaje desarrollador.

Impacto de implementación de las actividades

La escuela escogida fue el centro de referencia provincial de Educación Secundaria. Al utilizar las herramientas de la Estadística Matemática para la determinación del tamaño de la muestra objeto de estudio con un muestreo irrestricto aleatorio (MIA), se determinó un tamaño de muestra máximo para un nivel de significación del 95% y un error de muestreo de 0,15. Así, la cantidad de estudiantes seleccionados del 7mo grado fue de 36.

Para la determinación de la cantidad de estudiantes por cada grupo para el estudio se utilizó el muestreo estratificado con distribución proporcional (Tabla 1) y para la selección el muestreo aleatorio simple. Así se garantizó que la muestra tuviera calidad y tamaño apropiados para hacer mínimos los errores de muestreo y fuera representativa para el estudio que se hizo.

	7mo-1	7mo-2	7mo-3	7mo-4	7mo-5	7mo-6	7mo-7	Total
Población	30	29	30	29	31	33	30	**212**
Muestra	5	5	5	5	5	6	5	**36**
Frecuencia	0,17	0,17	0,17	0,17	0,16	0,18	0,17	**0,17**

Tabla 1: Distribución de la muestra seleccionada por cada uno de los grados

Desde el propio inicio de la etapa de familiarización, a los alumnos se le facilitó tiempo de máquina con los programas computarizados, para que fueran elaborando hojas de trabajo donde hicieran construcciones y mediciones de las diferentes figuras planas que conocían. Esto provocó en los estudiantes el despertar de un interés no usual hacia la Geometría, en la medida en que iban descubriendo las potencialidades de los mismos.

Al comenzar la implementación de las actividades diseñadas se notó que los estudiantes se vieron en la necesidad de hacer un uso frecuente del vocabulario técnico de la asignatura para poder expresar los procedimientos utilizados. Tal escenario facilitó el desarrollo y la fluidez en su utilización, así como la concienciación del empleo de los conceptos implicados.

En este proceso se verificó que la utilización de los asistentes matemáticos como el GeoGebra posibilita que el alumno despliegue su conocimiento al abordar los ejercicios, problemas y actividades que se presentan. Al mismo tiempo, este comparte sus conocimientos y necesidades con otros. Esto provocó en los estudiantes cambios de actitud ante la asignatura, sintiéndose descubridores del conocimiento.

Uno de los aspectos más apreciables fue la posibilidad de sistematizar los conocimientos geométricos anteriores. En la implementación de las situaciones de aprendizaje surgieron nuevas discusiones, o posibles interrogantes que podían haber sido incluidas en ellas. Lo que denotó la necesidad de someter bien a debate por parte de los profesores los ejercicios diseñados.

La utilización de los medios tanto por el profesor como por los estudiantes se hizo más sistemático, de manera particular, estos últimos se interesaron por emplearlos con mayor regularidad para el estudio independiente. Esto generó que se incrementaran los niveles de independencia y protagonismo de los estudiantes, a la vez que se elevaran los niveles de calidad en la asimilación de los contenidos geométricos. La concepción de estos medios posibilitó la movilidad, teniendo en cuenta que se logró diversidad de situaciones que propiciaron la adquisición de más conocimientos en menos tiempo que el que se dedica utilizando solo los tradicionales.

En resumen, después de implementada la propuesta, el empleo de los medios en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos se evaluó de adecuado, a partir de los resultados obtenidos en indicadores tales como el grado de contribución al cumplimiento del objetivo, el nivel de interacción con los estudiantes y el grado en el que medio es portador del contenido de aprendizaje.

Para concluir es preciso señalar que los estudiantes de los distintos niveles educacionales en Cuba, junto a los demás involucrados en el proceso didáctico de la Matemática, necesitan un salto cualitativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría. Esto permite optimizar esta actividad con el desarrollo de un nuevo tramado de relaciones orientado a considerar la incorporación de las nuevas tecnologías de la Informática y la Comunicación en la implementación de situaciones dirigidas a la actualización didáctica que se necesita para desarrollar clases contemporáneas. Esto debe ser en un proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática acorde con el desarrollo tecnológico disponible.

Las actividades propuestas tienen como bases los niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, la formación por etapas de las acciones mentales y la didáctica para un aprendizaje desarrollador. Esto prepara al estudiante para enfrentar una forma de pensamiento de un nivel de desarrollo más formal; permite el manejo del vocabulario técnico de la asignatura, en tanto que tiene que compartir o socializar lo aprendido, lo cual también favorece lo desarrollador y posibilita la sistematización de los conocimientos, pues los alumnos siempre tendrán que partir de los elementos más elementales a los más complejos.

Es necesario que los profesores pongan en ejercicio todas sus capacidades, esfuerzos y voluntad para el cambio de una nueva forma de pensar y actuar, como parte de las transformaciones que se vienen desarrollando en la Educación Secundaria actual, y la disponibilidad de nuevos medios y recursos. La propuesta que se presenta en este artículo puede contribuir a ello, pues promueve clases en las que los estudiantes ofrecen y reciben ayudas entre ellos, en función de sus diferentes zonas de desarrollo. Esto se logra a partir de una planificación que contempla también la esfera inductora de la personalidad de los estudiantes que participan, en un proceso de colaboración que involucra sus particularidades.

REFERENCIAS

Alfonso, I. y Izquierdo, R. (2013). La sistematización de la Geometría en el sexto grado a través de ejercicios integradores. *Opuntia Brava*, 5 (4) Recuperado de: http://opuntiabrava.ult.edu.cu/index.php/numeros/2013/vol5num4.

Carmenates, O.A., Rodríguez, M. y Gamboa, M.E. (2014). Recursos didácticos para favorecer la resolución de problemas matemáticos. En S. Lima. *Didácticas de las Ciencias. Nuevas perspectivas* (Quinta parte) (pp. 11-38). La Habana: Educación Cubana.

Fernández, R.M. y Alfonso, I. (2014). La teoría de Galperin en el aprendizaje de la Matemática. Opuntia Brava, 6 (2) Recuperado de: http://opuntiabrava.ult.edu.cu/index.php/numeros/2014/vol6num2.

Joaquim, O., Gamboa, M.E. y Fonseca, J.J. (2017). Las funciones lineales a partir de las acciones mentales de la teoría de Galperin. Dilemas Contemporáneos. *Educación, Política y Valores*. 4 (2).

Llantén, J. C. y Bermúdez, M. A. (2014). *Una aproximación al aprendizaje de la semejanza de triángulos en geogebra*. Universidad de Las Tunas. (Tesis doctoral inédita).

Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *Uniciencia,* 27 (1).

Zaldivar, L., Cruz, Y. y Gamboa, M.E. (2015). Mediación didáctica contextualizada de las tecnologías de la Información y la Comunicación para la fijación de los conceptos matemáticos. *Didasc@lia: Didáctica y Educación*, 6 (1), 49-68.