

GeoGebra, una herramienta para facilitar la comprensión de la función exponencial y sus propiedades

GeoGebra, a tool to facilitate the understanding of the exponential function and its properties.

Alexei Castro Salas¹ (alexei.castro84@gmail.com) (<https://orcid.org/0000-0002-3759-2754>)

Pedro López León² (pedro.leonlopez@cinvestav.mx) (<https://orcid.org/0000-0002-7005-3103>)

Resumen

La introducción de los dispositivos móviles en nuestra cotidianidad es un hecho ostensible como también lo es la evidencia de que estos están subutilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. El presente artículo tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica para la introducción de la función exponencial y sus propiedades a partir del uso de GeoGebra para dispositivos móviles en las clases de Matemática del onceno grado. La metodología de la propuesta se basa en abecés de la ingeniería didáctica, mientras que el componente experimental se desarrolló con estudiantes de onceno grado de preuniversitario, los cuales, al resolver la guía de estudio diseñada, lograron comprender y caracterizar elementos fundamentales del objeto matemático función exponencial. El estudio demuestra que la GeoGebra constituye una herramienta informática de considerable e incuestionable apoyo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje y recreación de la Matemática. Es un medio electrónico-digital que permite visibilizar las principales características, propiedades y fundamento lógico-teórico de contenidos matemáticos ya mencionados; de manera especial aquello que se relaciona con el estudio de las funciones reales que son muy útiles en los procesos de modelación y explicación de situaciones puntuales del entorno. Se propuso una guía de estudio para introducir el contenido referido al objeto matemático de función exponencial, que permitió la conversión entre los distintos registros semióticos, mediado por la app GeoGebra, y generó el desarrollo de los diferentes tipos de pensamiento, fundamentalmente, el variacional, apoyados en las TIC.

Palabras clave: función exponencial, GeoGebra, guía de estudio.

Abstract

The introduction of mobile devices in our daily life is an ostensible fact as well as the evidence that they are underutilized in the teaching-learning process of Mathematics.

¹ Máster en Enseñanza de la Matemática. Licenciado en Educación en la especialidad de Ciencias Exactas. Profesor Instructor adjunto de la Universidad de Camagüey, vinculado al CECEDUC. Cuba.

² Máster en Enseñanza de la Matemática. Ingeniero Eléctrico. Profesor Asistente, vinculado al CECEDUC. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México). México.



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

The objective of this article is to design a didactic sequence for the introduction of the exponential function and its properties through the use of GeoGebra for mobile devices in eleventh grade Mathematics classes. The methodology of the proposal is based on didactic engineering, while the experimental component was developed with eleventh grade pre-university students, who, by solving the designed study guide, were able to understand and characterize fundamental elements of the mathematical object exponential function. The study demonstrates that GeoGebra constitutes an informatics tool of considerable and unquestionable support within the teaching-learning process and recreation of Mathematics. It is an electronic-digital medium that makes it possible to visualize the main characteristics, properties and logical-theoretical foundation of mathematical contents already mentioned; especially those related to the study of real functions that are very useful in the processes of modeling and explanation of specific situations of the environment. A study guide was proposed to introduce the content referred to the mathematical object of the exponential function, which allowed the conversion between the different semiotic registers, mediated by the GeoGebra app, and generated the development of different types of thinking, fundamentally, the variational, supported by ICT.

Key words: exponential Function, GeoGebra, Study Guide.

Introducción

En la actualidad las tecnologías de la información y las comunicaciones (TIC) han ido introduciéndose en todos los ámbitos de la sociedad, influyendo en gran parte de nuestra cotidianidad, comenzando por nuestra comunicación con otros congéneres a través de las redes sociales, pasando por aplicaciones didácticas para facilitar nuestro aprendizaje hasta llegar a cuestiones que nos facilitan tanto la vida como pueden ser las plataformas o pasarelas de pagos.

Sin embargo, aun cuando estas TIC han irrumpido desde hace varios años en nuestro sistema educacional, las potencialidades que brindan las mismas no son explotadas al cien por ciento, utilizándose meramente en la resolución de tareas básicamente reproductivas donde en pocas ocasiones esto no contribuye a un aprendizaje significativo.

Según el criterio de Yañez & Arias (2018), el empleo de dispositivos móviles se encuentra en constante crecimiento debido a sus múltiples ventajas en el entorno educativo y porque ayuda a mejorar la competitividad del proceso de enseñanza.

La Matemática como asignatura fundamental dentro del currículo de la enseñanza media superior es una a las que las TIC han “invadido” de forma ostensible, existen un sin número de software para ordenadores y aplicaciones para dispositivos móviles que facilitan la resolución de ejercicios o la apropiación de conceptos y definiciones.

Como afirma Benítez Oliva & Rivera Montero (2021) las dificultades que ha presentado el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática ha tomado entre sus

direcciones el desarrollo de aplicaciones de ordenador que faciliten al profesor la enseñanza de la misma y al estudiante su aprendizaje.

La enseñanza tradicional de la Matemática obstaculiza la asimilación e identificación de ciertos conceptos y objetos matemáticos. Los autores comparten el criterio de Dorado Auz & Díaz Gómez (2014, citando a Barquero Farras et al., 2013) que defiende la teoría de que el proceso de enseñanza tradicional se divide en dos etapas: la primera, el profesor enseña los conceptos matemáticos ya construidos, y la segunda, donde el estudiante debe aplicar dichos conocimientos en situaciones problémicas. Esto deriva en uno de los problemas fundamentales en los diferentes niveles escolares, que es la pérdida de sentido y desarticulación de los contenidos matemáticos y su aplicación en otras disciplinas o asignaturas, así como un distanciamiento: contenido-problemas extra matemáticos, situación que imposibilita el proceso de construcción de conceptos.

GeoGebra, es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficas, estadísticas y cálculo en un solo motor. Además, GeoGebra ofrece una plataforma en línea con más de 1 millón de recursos gratuitos para el aula creados por nuestra comunidad multilingüe. Estos recursos se pueden compartir fácilmente a través de la plataforma de colaboración GeoGebraClassroom donde se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real (GeoGebra, 2016).

Por lo antes expuesto, constituye una herramienta informática de considerable e incuestionable apoyo dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje y recreación de la Matemática. Es un excelente medio electrónico-digital que permite visibilizar las principales características, propiedades y fundamento lógico-teórico de contenidos matemáticos ya mencionados; de manera especial aquello que se relaciona con el estudio de las funciones reales que son muy útiles en los procesos de modelación y explicación de situaciones puntuales del entorno.

Debido a las grandes potencialidades que ofrece este software, el Ministerio de Educación (Mined) ha recomendado su uso en la enseñanza media, sin embargo, a partir de la observación se ha podido constatar que existe poca formación de los docentes en cuanto al uso de GeoGebra y particularmente de cómo integrarlo dentro del PEA de la matemática de una manera armoniosa y efectiva.

Como se expone en el programa de la asignatura, diseñado para el perfeccionamiento de la educación, la Matemática para cumplir con la función asignada dentro del modelo de preuniversitario cubano, requiere ser desarrollada con un enfoque metodológico general que tenga en cuenta las experiencias de avanzada en el campo de las ciencias de la educación y de la didáctica de la Matemática. Los lineamientos de trabajo de esta asignatura, válidos para las distintas educaciones, reflejan las ideas esenciales del enfoque metodológico general de esta para la dirección del proceso educativo. Se requiere implementar estos lineamientos desde cada actividad de trabajo metodológico, para que la clase cumpla con las exigencias requeridas y fomente, sobre todo, el interés de los estudiantes hacia la materia.



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

Debemos señalar fundamentalmente tres lineamientos de los planteados por Álvarez et al. (2014), estos son:

1. Plantear el estudio de los nuevos contenidos matemáticos en función de resolver nuevas clases de problemas, de modo que la resolución de problemas no sea sólo un medio para fijar, sino también para adquirir nuevos conocimientos, sobre la base de un concepto amplio de problema.
2. Potenciar el desarrollo de los estudiantes hacia niveles superiores de desempeño cognitivo, a través de la realización de tareas cada vez más complejas, de carácter interdisciplinario, y el tránsito progresivo de la dependencia a la independencia y la creatividad.
3. Utilizar las tecnologías, incluidas las de la informática y la comunicación, con el objetivo de adquirir conocimientos y racionalizar el trabajo de cálculo, pero también con fines heurísticos.

Es en este último donde precisamente falla el proceso, puesto que la utilización de las TIC es casi nula, dejando espacio básicamente solo a tareas meramente reproductivas con la utilización de los softwares educativos de la Colección Futuro o la enciclopedia colaborativa cubana ECURED.

De ahí que el presente artículo tenga como objetivo diseñar una secuencia didáctica para la introducción de la función exponencial y sus propiedades a partir del uso de GeoGebra para dispositivos móviles en las clases de Matemática del oncenno grado.

Materiales y métodos

La metodología empleada para el desarrollo de este estudio, fue de tipo experimental, en el cual se orientó una guía de estudio para su resolución y el análisis documental. Por lo que, se consultaron diferentes fuentes de datos secundarios, para ubicar proyectos y trabajos realizados anteriormente y fundamentar la problemática que tienen los estudiantes en Matemática, así como conocer recursos tecnológicos útiles para resarcir esta problemática, como lo es el uso de GeoGebra en el aula.

En función de los beneficios que conlleva la introducción efectiva del uso de GeoGebra en las clases de Matemática del preuniversitario, se realizó el análisis y síntesis de documentos normativos del Mined, currículos, orientaciones metodológicas y algunas metodologías y experiencias en el uso de GeoGebra a partir de investigaciones realizadas en Cuba y el mundo. Para lo cual se determinaron las principales características de dichas metodologías.

El estudio se realizó en un grupo de 30 estudiantes de oncenno grado del IPU "República Bolivariana de Venezuela" de la provincia de Camagüey, los estudiantes desarrollaron la guía de estudio que consta de cinco actividades haciendo uso de dispositivos móviles u ordenadores personales, para el análisis escrito, hemos usado los procedimientos de uno de uno de los estudiantes al que llamaremos Randy.

La parte experimental se llevó a cabo en dos momentos distintos, el primero, durante un turno de clase para realizar las actividades uno y dos. El segundo, a través de la orientación de una Tarea Extraclase a desarrollar durante el fin de semana para la actividad tres. La guía de estudio se compartió por grupos de Whatsapp y estuvo disponible igualmente en el laboratorio de informática del centro.

Resultados

Esta guía de estudio tiene como objetivo general: Resolver el cuestionario orientado apoyándose en la app GeoGebra para móviles u ordenadores, lo que permite al estudiante acortar los tiempos de resolución de las actividades y aumentar sus competencias digitales.

Como objetivos específicos:

1. Identificar la monotonía de la función exponencial de la forma: $f(x) = a^x$, al variar el parámetro a en la representación gráfica de la función. Exponer sus conclusiones.
2. Identificar el desplazamiento de la función exponencial de la forma: $f(x) = a^x + d$, al variar el parámetro d en la representación gráfica de la función. Exponer sus conclusiones.
3. Identificar el desplazamiento de la función exponencial de la forma: $f(x) = a^{x-c}$, al variar el parámetro c en la representación gráfica de la función. Exponer sus conclusiones.
4. Identificar el desplazamiento de la función exponencial de la forma: $f(x) = a^{x-c} + d$, al variar el parámetro c y d en la representación gráfica de la función. Exponer sus conclusiones.
5. Identificar la dilatación y contracción vertical de la función exponencial de la forma: $f(x) = n \cdot a^x$, al variar el parámetro n en la representación gráfica de la función. Exponer sus conclusiones.
6. Resolver ejercicios de función exponencial donde interprete la información de los gráficos, analizar las propiedades y exponer sus conclusiones.

Guía de estudio

Actividad 1. Introduce en la barra de entrada de la app GeoGebra las siguientes funciones:

Función	¿Cuál es el valor de "a"?	¿Cuál es el comportamiento de la monotonía de la función?
$f(x) = 2^x$		



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

$g(x) = 4^x$		
$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		
$i(x) = 0.6^x$		

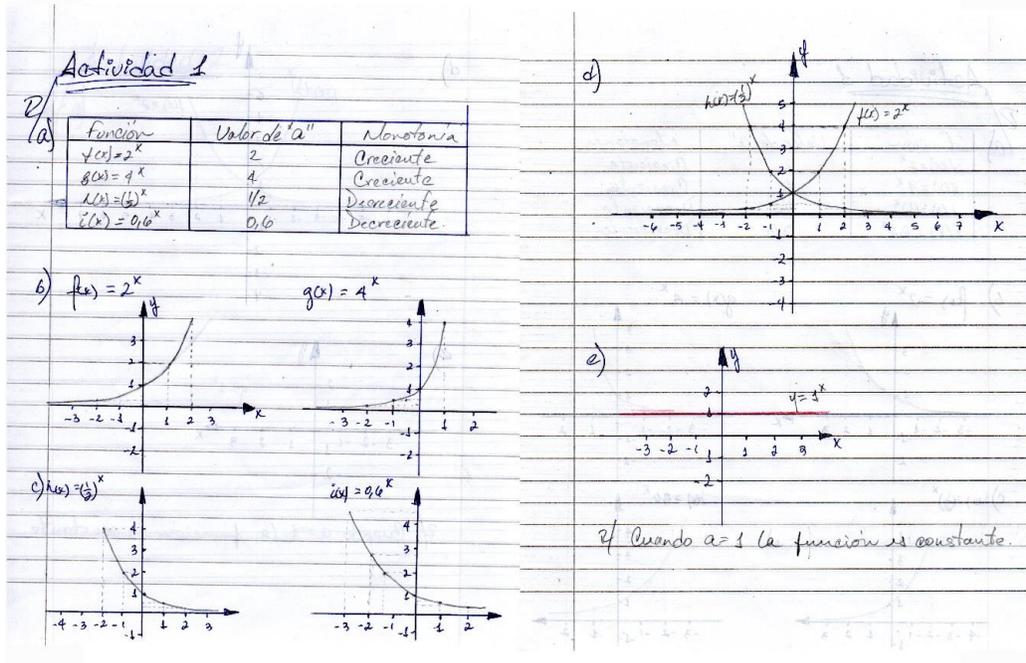
Responde:

- Completa los espacios en blanco de la tabla
- Esboza en tu cuaderno los gráficos de $f(x)$ y $g(x)$
- Esboza en tu cuaderno los gráficos de $h(x)$ y $i(x)$
- Representa las funciones $f(x)$ y $h(x)$ en un mismo eje coordenado e interpreta lo que sucede con la monotonía de las mismas.
- ¿Cómo sería el gráfico de la función si $a = 1$? ¿Será igual a las funciones representadas? Justifique su respuesta.

En la actividad uno se caracteriza la función exponencial de la forma $f(x) = a^x$.

Análisis a priori: mediante el uso de la app GeoGebra, los estudiantes representan gráficamente las funciones dadas. Mediante al aprehensión perceptiva y discursiva en el registro gráfico reconocerán que si $a > 1$ la monotonía de la función exponencial es creciente, en tanto, si $0 < a < 1$ la monotonía de la función exponencial es decreciente y de grados anteriores reconocerían que si $a = 1$ la función es constante.

Imagen 1. Actividad uno desarrollada por el estudiante en su cuaderno



Fuente: Documento escaneado

Análisis a posteriori: Randy, primeramente completa en su cuaderno los espacios en blanco de la tabla, mediante la aprehensión perspectiva reconoció los valores de a y su relación con la monotonía de la función, reconociendo correctamente las mismas. Por medio de la app GeoGebra para dispositivos móviles, representó las cuatro funciones y mediante la aprehensión perspectiva fue capaz de esbozar correctamente las cuatro funciones en su cuaderno y concluir correctamente la propiedad de la monotonía en la función exponencial. En el inciso c, representó ambas funciones en un mismo gráfico, lo que le permitió mediante la aprehensión perspectiva la propiedad monotonía de la función exponencial.

Actividad 2. Introduce en la barra de entrada de la app GeoGebra las siguientes funciones:

Función	¿Cuál es el valor de "a"?	¿En qué eje se desplaza la función?
$f(x) = 4^x$		
$g(x) = 4^{x+2}$		
$h(x) = 4^{x+2}-1$		



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022

Aprobado: 02/06/2023

$i(x) = \frac{1^{x+3}}{2} + 2$		
--------------------------------	--	--

Responde:

- Completa los espacios en blanco de la tabla.
- Esboza en un mismo gráfico las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$. Describe la relación de posición de $g(x)$ y $h(x)$ con respecto a $f(x)$.
- Analiza las propiedades de las funciones $h(x)$ e $i(x)$.

En la actividad dos de la guía de estudio, se caracteriza la función que tiene la forma $f(x) = a^{(x-c)} + d$, $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$.

Análisis a priori: Mediante la modificación de los elementos c y d se espera que Randy sea capaz de transformar la función exponencial de la forma $f(x) = a^{(x-c)} + d$ y mediante la aprehensión perspectiva inferir cuales son los desplazamientos, mediante la aprehensión discursiva en el registro gráfico, inferir que: si $c > 0$ la función se desplaza horizontalmente hacia los negativos y viceversa, luego, si $d > 0$ entonces la función se desplaza verticalmente hacia los positivos. De forma tal que si ambos parámetros son distintos de cero entonces la función se desplazaría en ambos ejes.

Imagen 2. Actividad dos desarrollada por el estudiante en su cuaderno

Actividad 2

R/g	Función	Valor de "a"	Desplazamiento Eje
	$f(x) = 4^x$	4	No se desplaza
	$g(x) = 4^{(x+2)}$	4	Se desplaza en X
	$h(x) = 4^x - 1$	4	Se desplaza en Y
	$i(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} + 2$	$\frac{1}{2}$	Se desplaza en Y y X

b)

c)

Propiedades

- Dom: $x \in \mathbb{R}$
- Imag: $y \in \mathbb{R}; y > 2$
- Ceros: No tiene
- Monot: Decreciente.
- V. Max: No tiene
- V. Min: No tiene
- Paridad: No es par ni impar.

Siendo $f(x)$ la función original o de referencia se concluye que la relación de posición de $g(x)$ con respecto a $f(x)$, la primera se desplaza 2U en el eje X hacia los negativos, contrario a lo que indica el signo en el exponente de la función. Luego la función $h(x)$ se desplaza únicamente en el eje Y hacia los negativos, o sea, en el mismo sentido del signo del coeficiente "d" por tanto se desplaza +3U.

Fuente: Documento escaneado



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022

Aprobado: 02/06/2023

Análisis a posteriori: Randy, primeramente, completa los espacios en blanco de la tabla y a partir de los elementos c y d plantea correctamente los desplazamientos de las funciones. Seguidamente utilizando el GeoGebra representa gráficamente las tres funciones y esbozándola luego en su cuaderno correctamente y argumentando su respuesta así:

Siendo $f(x)$ la función original o de referencia se concluye que la relación posicional $g(x)$ con respecto a $f(x)$ se desplaza $2u$ en el eje X hacia los negativos, contrario a lo que indica el signo en el exponente. Luego, la función $h(x)$ se desplaza únicamente en el eje Y hacia los negativos, o sea, en el mismo sentido del signo del coeficiente d por tanto se desplaza menos $1u$.

Para el inciso c, el estudiante representó la función en el GeoGebra, lo que le facilitó el esbozo en su cuaderno y el análisis posterior de sus propiedades, las cuales identificó correctamente, dando la siguiente respuesta:

Propiedades:

Dom: $x \in \mathbb{R}$

Imag: $y \in \mathbb{R}; y > 2$

Cero: No tiene

Monot: Decreciente

V.Máx: No tiene

V. Mín: No tiene

Paridad: No es par ni impar

Actividad 3. Analiza las situaciones siguientes e interpreta los siguientes gráficos.

Un emprendedor implementa un proyecto de desarrollo local que cuenta con un presupuesto de 500000 pesos, el cual, consiste en la instalación de una mini industria para el procesado de pulpas de frutas. En las siguientes gráficas se muestra el crecimiento productivo y los réditos económicos obtenidos, así como las inversiones y gastos durante el primer año.

Periodos de gastos e inversión en un año.

- De enero a abril (Construcción de la infraestructura)
- De abril a junio (Inversión en producción)
- De mayo a diciembre (Producción y ganancias)

3.1. Interpretando las gráficas responde:

- a) Qué tipo de función representa cada gráfica.
- b) Representa algebraicamente la gráfica 1.



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

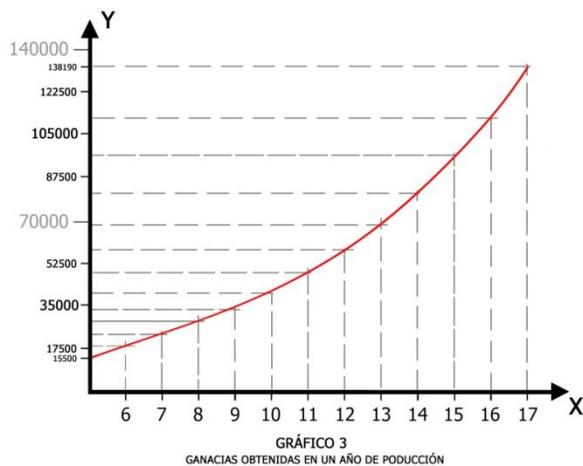
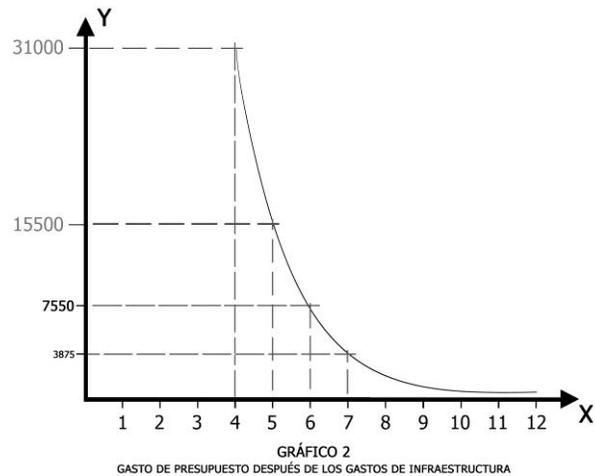
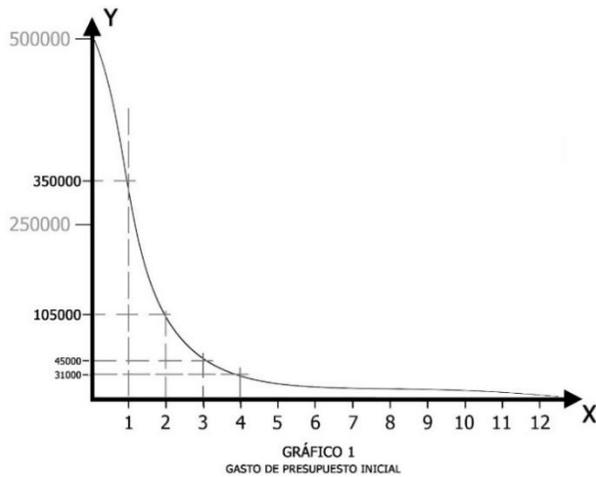
Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022

Aprobado: 02/06/2023

c) A partir de los gráficos 2 y 3, describa las características del comportamiento de las inversiones y las ganancias obtenidas.



Mes	Ganancias
Saldo Inicial	15500
Junio	18600
Julio	22320
Agosto	26784
Septiembre	32140
Octubre	28568
Noviembre	46281
Diciembre	55537
Enero	66644
Febrero	79972
Marzo	95966



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

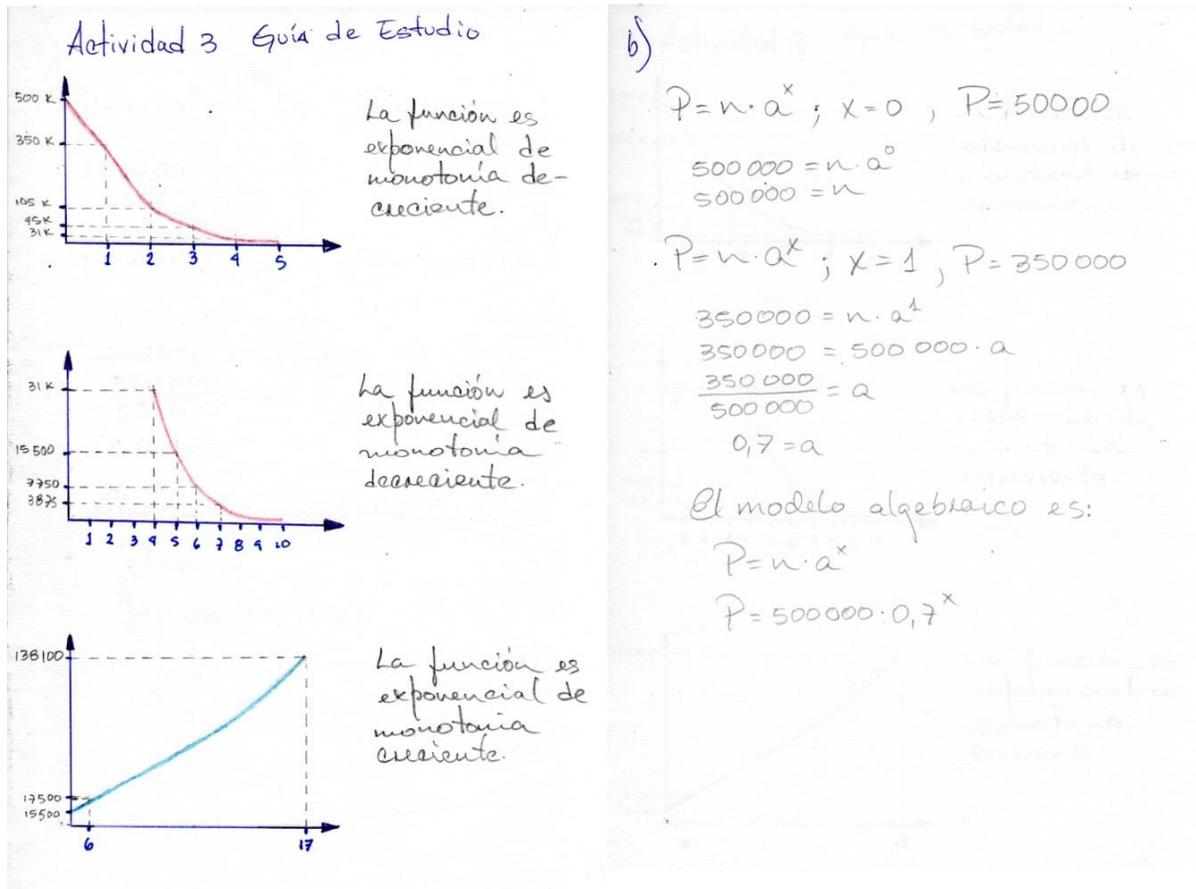
Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

Abril	115159
Mayo	138190

La actividad tres consiste en una Tarea Extraclase, donde se utiliza la función exponencial para la modelación de situaciones de la vida cotidiana.

Análisis a priori: Es este caso, se pretende que Randy realice la conversión de representación de la función exponencial del registro gráfico al registro algebraico utilizando el modelo: $f(x) = n \cdot a^x$, trabajando en el gráfico dado y que describa el comportamiento del presupuesto inicial. Además, deberá representar en un gráfico único las funciones que representan “Inversión” y “Ganancias” para analizar e interpretar gráfico y argumentar las conclusiones, obtenidas de dicho análisis.

Imagen 3. Actividad tres desarrollada por el estudiante en la Tarea Extraclase.



Fuente: Documento escaneado.

Análisis a posteriori: En el inciso “a”, Randy identificó correctamente por medio de la aprehensión perspectiva los gráficos, los cuales esbozó correctamente y mediante la aprehensión discursiva argumentó la identificación como función exponencial y la propiedad monotonia.

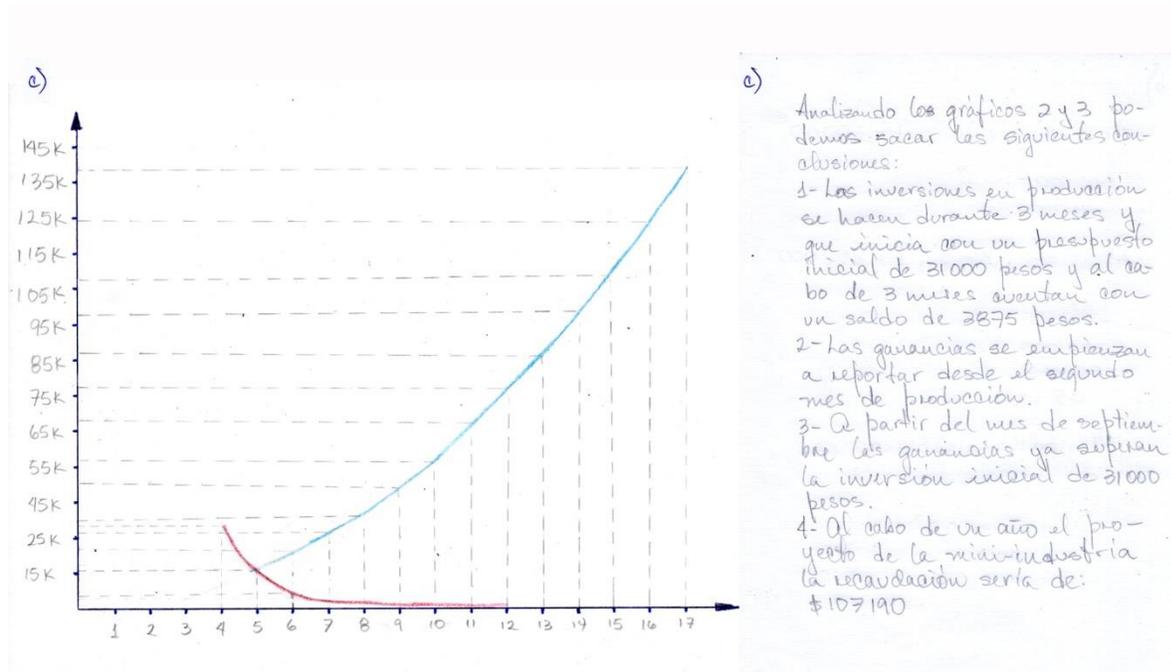
En el inciso “b”, el estudiante en cuestión identificó correctamente por medio de la aprehensión perspectiva, los puntos del gráfico que utilizó para hallar el modelo matemático, realizó de manera correcta la conversión de la representación de la función en el registro gráfico al registro algebraico.

En el inciso “c”, identificó correctamente mediante la aprehensión perspectiva los gráficos que debía esbozar, representándolos adecuadamente, cometiendo un pequeño error en la escala del eje y lo que provocó que el esbozo se distorsionara en alguna medida. Mediante la aprehensión discursiva fue capaz de argumentar las conclusiones

derivadas del análisis de la intersección de los gráficos correctamente como se muestra en la siguiente imagen. Destacando que:

- El presupuesto inicial es de \$ 31000 y al cabo de tres meses el saldo sería de \$ 3875.
- Las ganancias se comienzan a percibir desde el segundo mes de producción.
- A partir del mes de septiembre las ganancias ya comienzan a superar la inversión inicial de los \$ 3875.

Imagen 4. Actividad tres desarrollada por el estudiante en la Tarea Extraclase



Fuente: Documento escaneado.

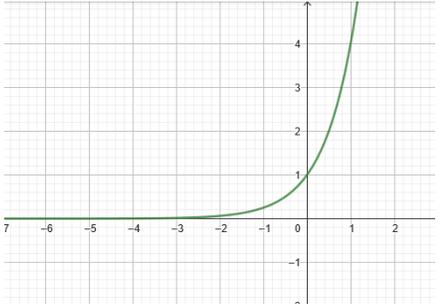
Discusión

Para el diseño de la guía de estudio los autores se basaron en aspectos de la teoría de registros semióticos de Duval (2009) y del pensamiento variacional de Vasco (2002). Asimismo, en la relación entre el pensamiento y el lenguaje (Vigotsky, 1978, citado por Báez Ureña et al., 2018) en lo que plantea que este último es el medio de materialización de la transferencia de los distintos registros semióticos.

Duval (2009) plantea que las actividades cognitivas propias del aprendizaje de la Matemática como la conceptualización, razonamiento y resolución de problemas requieren el uso de sistema de expresión y representación. Se tiene en cuenta que un objeto matemático no es manipulable directamente, sino, que solo puede ser transformado a través de sus representaciones, las cuales pertenecen a registros de representaciones semióticas como el lenguaje natural, figural, algebraico y gráfico.

En esta propuesta el autor se basa en los registros de lenguaje natural, algebraico y gráfico.

Tabla 1. Representación de la función exponencial en diferentes registros

Registro de representación semiótica		
Lenguaje común	Lenguaje algebraico	Representación gráfica
Función exponencial de base 4	$f(x) = 4^x$	

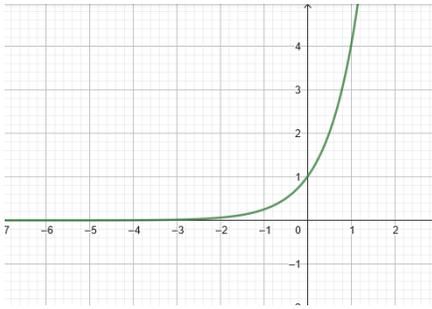
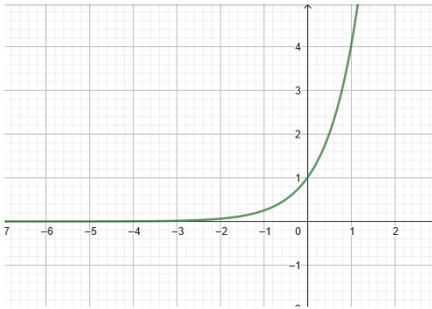
Fuente: Elaboración propia

Para Duval (2009), las actividades cognitivas fundamentales de representación ligadas a la semiosis (actividad ligada a la producción de representaciones semióticas, la cual depende de los signos que forman parte del sistema utilizado para generarlas) son la formación, que implica recurrir al uso de signos para sustituir la visión de un objeto; el tratamiento, que es la transformación de una representación a otra al interior del mismo registro; y la conversión, que es una transformación que produce una representación en un registro distinto al inicial. De acuerdo con el autor, para que se logre el aprendizaje de un objeto matemático, se debe realizar la conversión de la representación de dicho objeto, como mínimo, en dos registros de representación semiótica diferentes.

Duval (2012) considera cuatro tipos de aprehensiones en el registro figural: *la aprehensión perceptiva*, que permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio; *la aprehensión secuencial*, que concierne al orden de construcción de una figura, este orden no solo depende de las propiedades matemáticas de la figura, sino también de las herramientas a utilizar; *la aprehensión discursiva*, que corresponde a una explicación desde otras propiedades matemáticas; y *la aprehensión operatoria*, que tiene que ver con las modificaciones o transformaciones que podemos hacer a las figuras (en nuestro estudio a una representación gráfica en el eje coordenado), se distinguen tres tipos: la modificación mereológica, la modificación óptica y la modificación posicional. Nos centramos en la aprehensión operatoria del tipo modificación posicional, que consiste en el desplazamiento de una figura en relación a un referencial, es decir, mediante movimientos por rotación, traslación y simetría.

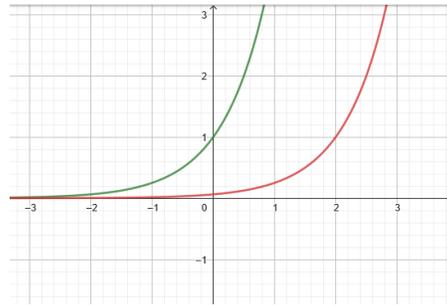
En la guía de estudio propuesta, por tratarse del objeto matemático función exponencial y trabajar dentro del registro semiótico gráfico, se presta mayor atención en las aprehensiones perceptiva, secuencial y discursiva como se muestra en la tabla 2.

Tabla 2. Tipo de aprehensiones

Registro de representación semiótica		
Tipo de aprehensiones	Descripción	Ejemplo relativo a la función exponencial
Perspectiva	Permite identificar o reconocer inmediatamente una forma o un objeto matemático en el plano o en el espacio.	
Discursiva	Es aquella que corresponde a una acción mediante la cual el sujeto hace uso de propiedades, teoremas o axiomas.	

- La función $f(x)$ es exponencial.
- La regla de correspondencia de $f(x)$ es 4^x
- La función $f(x)$ se intersepta con el eje y en el punto $(0;1)$

- La función $f(x)$ es creciente porque la base es mayor que 0.
- El dominio de $f(x)$ es \mathbb{R} .
- La imagen de $f(x)$ es $y \in \mathbb{R}; y > 0$
- La función no tiene cero.
- La asíntota horizontal está ubicada en $y = 0$



Función original

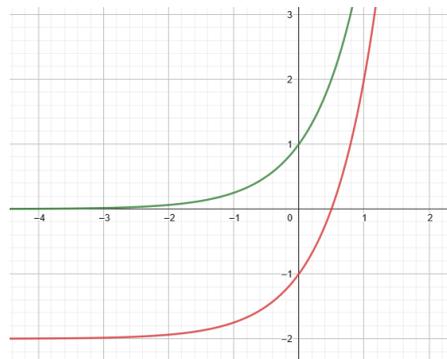
$$f(x) = 4^x$$

Función desplazada

$$f(x) = 4^{(x-3)}$$

Operatoria
(Modificación
posicional
desplazamientos)

Consiste en el Desplazamiento de una figura en relación a un referencial, es decir, mediante movimientos por rotación, traslación y simetría

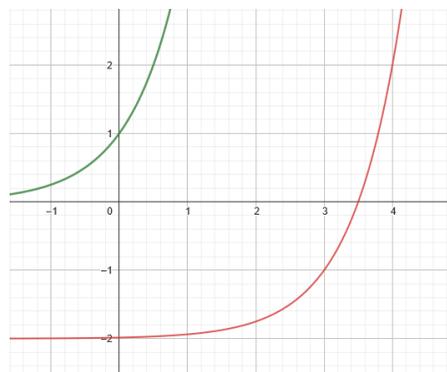


Función original

$$f(x) = 4^x$$

Función desplazada

$$f(x) = 4^x - 2$$



Función original

$$f(x) = 4^x$$

Función desplazada

$$f(x) = 4^{(x+3)} - 2$$

Fuente: Elaboración propia

La importancia de establecer relaciones entre las diferentes maneras de representar a la función exponencial, es resaltada por Sureda & Otero (2013) que describen el proceso de conceptualización de las funciones exponenciales en diferentes sistemas de representación, priorizan la participación activa de los estudiantes en el proceso de construcción. El autor señala en la complejidad de enseñar este tipo de funciones, por lo que recomienda involucrar más de un sistema de representación semiótica en el diseño de situaciones que se trabajen en el aula, por ejemplo, sistemas de representación numérico, algebraico, analítico-gráfico y verbal escrito.

Al ser la propuesta una guía de estudio se utiliza en el método de investigación aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue y otros (1995). La noción de ingeniería



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

didáctica surge en la didáctica de la Matemática a comienzos de los ochenta. Se denominó con este término a una forma de trabajo didáctico equiparable con el trabajo del ingeniero, quien, para realizar un proyecto determinado, se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Por ello el autor sostiene que el docente es concibe, planifica, realiza, observa y analiza secuencias de enseñanza para lograr la apropiación de un contenido matemático determinado por un grupo específico de estudiantes.

Es la ingeniería didáctica un método experimental, consta de dos fases: el análisis preliminar donde se realiza el análisis distinguiendo la dimensión epistémica, que implicó el desarrollo de un estudio histórico-epistemológico de la función exponencial, la dimensión cognitiva, que involucró la revisión de investigaciones cuyo objeto de estudio es la función exponencial, para identificar la problemática en torno al proceso de enseñanza aprendizaje de este objeto matemático, y la dimensión didáctica, que consistió en el análisis de los libros de texto de la educación preuniversitaria (onceno grado); la concepción y análisis a priori, donde se enuncia un conjunto de supuestos sobre lo que harán los estudiantes.

Asimismo, es la experimentación, en donde predomina el acercamiento entre el docente investigador y la población de estudiantes sujetos de la investigación; también se aplican los instrumentos diseñados por el autor y se llevan a cabo los registros de observación de la experiencia; y, finalmente, el análisis a posteriori y validación, que según Artigue y otros (1995), en esta etapa, se realiza el análisis de los datos recolectados durante los diferentes momentos de la experiencia didáctica. En esta fase, se analiza los datos recolectados en los dos encuentros realizados con las estudiantes durante la resolución de la guía de estudio y se contrastará con el análisis a priori. En el presente artículo se hace énfasis en las fases de análisis a priori y el análisis a posteriori de la Ingeniería didáctica.

Según la observación directa a estudiantes y la revisión y tabulación de resultados de evaluaciones, se detectaron dificultades propias del concepto en el proceso de enseñanza-aprendizaje, se hacen más patentes al momento de representar la función en el registro gráfico, fundamentalmente en la representación del cero y la ubicación correcta de la asíntota, así como el uso adecuado de la escala. Todo lo anterior evidentemente afecta la correcta definición de sus propiedades.

Teniendo en cuenta estas dificultades se buscó caracterizar a la función exponencial a partir de las variaciones de su base para estudiar su monotonía, así como la variación de los términos independientes para estudiar los desplazamientos en el eje coordenado. De los resultados el autor concluye que los estudiantes en su mayoría lograron comprender la génesis de la función exponencial, lo que se consolidó gracias al diseño, instrumentación y resolución de la guía de estudio, apoyados en el GeoGebra para dispositivos móviles u ordenadores.

Como pudo observarse, en la primera actividad, se evidenció que la app GeoGebra sirvió como medio para la conversión del registro algebraico al registro gráfico, lo cual,



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

como antes se ha descrito por medio de la aprehensión perspectiva, contribuyó a asimilar una característica de la función exponencial cuando tiene la forma $f(x) = a^x$.

En las dos primeras actividades se desarrollaron en un contexto intramatemático. Cuyo análisis se presenta en este artículo, se puede evidenciar que el GeoGebra sirvió de medio para la conversión de las representaciones del registro algebraico al registro gráfico, lo cual por medio de la aprehensión perceptiva ayudó a comprender las características y propiedades de la función exponencial.

La tercera actividad se compuso se desarrolló en un contexto extramatemático, cuyo objetivo fue investigar una función de la forma $f(x) = n \cdot a^x$. En el análisis del casos que se presenta en este artículo, se puede evidenciar la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos en las actividades uno y dos, relacionados al comportamiento de la función exponencial según el valor de la base, o si se han producido transformaciones gráficas. Gracias a la aprehensión perceptiva, se reconoce a partir de la información dada de forma gráfica o verbal, el uso de funciones exponenciales como modelos matemáticos apropiados para los casos planteados. Esto permitió poder representar a la función exponencial en los diferentes registros: lengua natural, tabular, algebraica y gráfica; y realizar coordinaciones entre ellos, dándose la conversión del registro gráfico al algebraico, y a partir de la aprehensión discursiva, se evidencia las conversiones de los registros gráfico y algebraico.

La enseñanza contextualizada, favorece la motivación y el interés del estudiante por el estudio, destaca Silva (2009). De ahí la importancia de la relación entre modelación matemática de situaciones relacionadas a la función exponencial y la realidad cotidiana, puesto que se pueden modelar funciones exponenciales no complejas como: la variación del dinero invertido, ahora que está tan de actualidad el tema de las MiPyMe y otros modos de gestión económica en Cuba, igualmente se pueden modelar en funciones más o menos complejas los casos de una epidemia como el COVID-19 o el Dengue.

Del mismo modo, indica que es una de las dificultades vinculadas al estudio de funciones, sobre todo de las que presentan variaciones no lineales, puesto que los estudiantes tienden a linealizar los procesos no lineales. El autor defiende que la explicitación, discusión y formalización de los conceptos en cada uno de los sistemas de representación favorece al tránsito de lo lineal a lo exponencial, reducen las dificultades en el estudio de dicha función.

Conclusiones

Hoy en día se ha generalizado el uso de dispositivos móviles, es bastante común que los estudiantes tengan acceso a un teléfono móvil, tablet u otro dispositivo, en este sentido la mayoría emplean dichos dispositivos porque lo consideran más cómodo y porque hacen un óptimo uso del tiempo en la realización de tareas o consultas puntuales, por lo que podemos afirmar que la generación actual tiene incorporados



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

procesos tecnológicos en el manejo de estos recursos que se han vuelto indispensables.

El estudio de la función exponencial a partir del uso del GeoGebra, permitió a los estudiantes, de forma dinámica, reconocer algunas características de estas funciones como la monotonía y transformaciones gráficas, y coordinar sus diferentes representaciones en los registros semióticos, de modo que los estudiantes, en particular Randy, dio indicios mediante sus respuestas de conceptualizar la función exponencial.

El diseño de la guía de estudio permitió al estudiante, primero, reconocer las características de la función exponencial, a partir de las características variacionales de sus parámetros c y d . Asimismo, el estudiante logró realizar coherentemente conversiones de las representaciones de la función exponencial en los registros de lengua natural, tabular, algebraico y gráfico, lo que significa, según la Teoría de las representaciones semióticas de Duval (2009).

Referencias

- Álvarez, P. M., B, A. y Villegas, E. (2014). *El proceso de enseñanza de la Matemática. Documentos metodológicos*. Pueblo y Educación.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. <http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf>
- Báez Ureña, N., Pérez González, O. L. y Blanco, R. (2018). Los registros de representación semiótica como vía de materialización de los postulados vigotskianos sobre pensamiento y lenguaje. *Revista Academia & Virtualidad*, 11(1), 16-26. doi.org/10.18359/ravi.2241
- Barquero Farras, B., Boch, M. y Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(1), 1-28. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/12757/pdf/36398>
- Benítez Oliva, L. E. y Rivera Montero, L. (2021). Guía para el uso de GeoGebra en Secundaria Básica. *IV Conferencia Científica Internacional. UCI*. Ediciones Futuro. <https://repositorio.uci.cu/jspui/handle/123456789/9758>
- Dorado Auz, I. y Díaz Gómez, J. L. (2014). Uso de la función exponencial para modelar crecimiento microbiano. *El Cálculo y su Enseñanza*, 5(Único), 75-90. https://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/data/docs/P2.bbf0a982b7788f.pdf
- Duval, R. (2009). Sémiosis, pensée humaine et activité mathématique. *Amazônia - Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 6(11), 126-143.
- Duval, R. (2012). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. *Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat*, 7(1), 118-138. <https://doi.org/10.5007/1981>



Opuntia Brava

ISSN: 2222-081X

RNPS: 2074

Volumen: 16

Número: 1

Año: 2024

Recepción: 18/11/2022 Aprobado: 02/06/2023

GeoGebra (2016, julio 15). Versión Web: <https://www.geogebra.org/about>

Silva, C. M. (2009). *Matemática, contextualización de sus contenidos*. [Tesis de Grado, Buenos Aires – Argentina].

Sureda, P. y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función. *Educación Matemática*, 25(2), 89-118. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40528961005.pdf>

Vasco, C. E. (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Universidad de Harvard. Bogotá - Colombia: Proyecto Zero. <http://funes.uniandes.edu.co/10178/>

Vygotsky, L. S. (1978). (1978). *Mind in society: The Development of higher psychological processes*. Harvard University Press. <http://ouleft.org/wp-content/uploads/Vygotsky-Mind-in-Society.pdf>

Yañez, J. y Arias, M. (2018). M-learning, aceptación tecnológica de dispositivos móviles en la formación online. *Revista Tecnología, Ciencia y Educación*, 6(10), 13-34. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6775332>

Conflicto de intereses: Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

Contribución de los autores: Los autores participaron en la búsqueda y análisis de la información para el artículo, así como en su diseño y redacción.