

# ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL DESARROLLO DE LAS HABILIDADES DEL PENSAMIENTO GEOMÉTRICO ESPACIAL EN ESTUDIANTES DE LA EDUCACIÓN PREUNIVERSITARIA

## EXPLORATORY STUDY ON THE DEVELOPMENT OF SPATIAL GEOMETRICAL THINKING SKILLS IN STUDENTS OF PRE-UNIVERSITY EDUCATION

Wilber Ortiz Aguilar<sup>1</sup>( [ortizwilber74@gmail.com](mailto:ortizwilber74@gmail.com))

Frank Michel Enrique Hevia<sup>2</sup>([frankmichel2008@gmail.com](mailto:frankmichel2008@gmail.com))

Juan Enrique García La Rosa <sup>3</sup> ( [juaneg@uo.edu.cu](mailto:juaneg@uo.edu.cu))

### RESUMEN

Desarrollar el pensamiento geométrico espacial en los estudiantes de la educación preuniversitaria en Cuba, como uno de los componentes del pensamiento matemático, es un imperativo en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Matemática en este nivel educativo. La mayoría de los estudiantes que promueven al duodécimo grado e incluso los que cursan la educación superior, en no pocas ocasiones, presentan dificultades en demostrar que poseen algún desarrollo de las habilidades relacionadas con el pensamiento geométrico espacial. En este trabajo, a partir del análisis crítico de investigaciones de diferentes autores sobre el tema, así como de la utilización de métodos tales como: analítico-sintético, inductivo-deductivo, encuesta, análisis de frecuencias, dójimas de bondad de ajuste para una población como pruebas de significación estadística; se realizó un estudio exploratorio de la situación actual del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes y profesores de la asignatura Matemática del Instituto Preuniversitario Urbano “Mártires del Porvenir” del municipio de Diez de Octubre en la provincia de La Habana. Estos resultados obtenidos permitieron realizar varias reflexiones que arrojaron inconsistencias tanto en estos estudiantes como en sus profesores en el ya mencionado nivel educativo en el Sistema Nacional de Educación en la República de Cuba.

**PALABRAS CLAVES:** pensamiento geométrico espacial, habilidades del pensamiento geométrico espacial, desarrollo de habilidades.

### ABSTRACT

Developing spatial geometric thinking in students of Pre-University education in Cuba, as one of the components of mathematical thinking, is an imperative in the teaching-learning process of the mathematics subject at this level educational. The majority of students who promoted to twelfth grade and even those who are

---

<sup>1</sup> Máster en Ciencias de la Educación, Licenciado en Educación, Especialidad Matemática – Computación, Docente de Matemática en la Educación Preuniversitaria, La Habana, Cuba.

<sup>2</sup> Doctor en Ciencias Pedagógicas, Docente de Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad Pedagógica “Enrique José Varona”, La Habana, Cuba.

<sup>3</sup> Doctor en Ciencias Pedagógicas, Docente de Cálculo Matemático, Facultad de Química, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba.

studying higher education, not infrequently, present difficulties in demonstrating that they possess some development skills related to spatial geometric thinking. In this work, from the critical analysis of research of different authors on the subject, as well as the use of methods such as: analytical - synthetic, inductive - deductive, survey, analysis of frequency, goodness of fit for a docimas population as tests of statistical significance; was an exploratory study of the current situation of the development of the spatial geometric thinking skills in students and teachers of the subject mathematics of the urban pre-University Institute "Martyrs of el Porvenir" of the municipality of 10 October in the province of Havana. These results allowed to make several reflections which showed inconsistencies in these students and their teachers in the aforementioned level of education in the national education system in the Republic of Cuba.

**KEY WORDS:** spatial geometric thinking, abilities of spatial geometric thinking, development of skills.

En la actualidad una de las tendencias del quehacer matemático en las instituciones educativas es el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes desde edades tempranas, según (Benítez y Cárdenas, 2008). Asimismo, Cabrales y otros (2017) consideran que la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos constituye uno de los campos más analizados en la investigación educativa.

Esto, tiene como propósito fundamental la reorientación de las prácticas pedagógicas, de las actividades didácticas y metodológicas. Por tanto, todo lo que acontece en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. De manera que se logre una enseñanza que se preocupe más por los procesos de pensamiento propios de esta ciencia y menos por los contenidos. (Sánchez y Bonilla, 1998).

Al mismo tiempo, con esta tendencia, se pretende trastocar la imagen de la Matemática como un saber acabado, aburrido, de estructura rígida, sin contradicciones, secuencial. Sobre esta base, un concepto es prerrequisito del siguiente y lo más importante es establecer teoremas, algoritmos, procedimientos para ser aplicados a la solución de problemas similares. Para ello, es esencial dejar a un lado la opción de crear y en donde las satisfacciones se presentan cuando se coincide con los resultados. (Malagón, 1998).

Benítez y Cárdenas (2008) consideran que entre las causas que han influido en la persistencia de estas dificultades antes mencionadas. De ahí, la creencia de que los estudiantes no están capacitados para pensar de manera abstracta y que su pensamiento es el producto del desarrollo de un estadio evolutivo. Lo que circunscribe su pensamiento a una serie de etapas que los estudiantes deben alcanzar y superar.

En este sentido, uno de los componentes del pensamiento matemático es el pensamiento geométrico espacial (Benítez y Cárdenas (2008) y Ballester (1982). En relación con el estudio de este tipo de pensamiento, investigadores como Hoffer (1981), Feria et al. (2006), Jungk (1982), Proenza (2002), McGee (1979)

han aportado habilidades que contribuyen al aprendizaje de los contenidos geométricos en la escuela.

Sobre esta base, a pesar de los aportes realizados por estos autores aún subsisten dificultades en el desarrollo de estas habilidades en los educandos. Estas, están derivadas de la enseñanza tradicional y poco desarrolladora de la Matemática en las instituciones escolares.

El proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática en Cuba no está exenta de estas limitaciones en el desarrollo del pensamiento geométrico espacial en los educandos. De manera, que estos llegan al último grado de la educación preuniversitaria e incluso en los que cursan la educación universitaria sin tener aprehendidas las habilidades relacionadas con este componente del pensamiento matemático.

Lo anterior, fue corroborado en un estudio exploratorio realizado por los autores de esta investigación en los institutos preuniversitarios del Municipio Diez de Octubre de La Habana. Asimismo, se realizó la valoración de los resultados de las Pruebas de matemática a nivel provincial y de la prueba pedagógica realizada a estudiantes de preuniversitario. En este sentido, se detectó las regularidades de las observaciones a clases de profesores de Matemática, de la aplicación de una encuesta a estos y de la entrevista a metodólogos de Matemática.

### **Estudio exploratorio sobre el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en estudiantes de la educación preuniversitaria**

Según Ballester (1982), el pensamiento geométrico espacial:

(...) no es más que un reflejo generalizado del espacio tridimensional basado en modelos. El mismo se pone de manifiesto cuando los alumnos forman un sistema de conceptos y relaciones mediante abstracción del espacio real, pueden representar mediante dibujos o modelos, estos reflejos del espacio e imaginar nuevos cuerpos y relaciones geométrico espaciales. (p.32)

Es oportuno precisar, que esta definición reduce en cierta medida, el desarrollo de esta forma de pensamiento matemático a la representación de lo tridimensional en lo bidimensional. Por ello, se obvia la reproducción, la construcción de esa figura espacial visualizada, pensada, creada en lo propiamente tridimensional. De ahí que a criterio de los autores de este trabajo, es parte esencial también de este proceso y de vital importancia para comprender ese espacio físico que rodea al estudiante.

En consonancia con Proenza (2002), que expresa que este pensamiento es un reflejo generalizado y mediato del espacio físico tridimensional. Este, tiene una fuerte base sensorial que se inicia desde las primeras relaciones del individuo con el medio. Asimismo, se sistematiza y se generaliza a lo largo del estudio de los contenidos geométricos en la escuela.

Sin embargo, esta base sensorial no ha sido suficientemente trabajada en las educaciones que le anteceden a la educación preuniversitaria. La misma, tiene que reflejarse en las habilidades del pensamiento geométrico espacial del proceso

de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en el preuniversitario, en cuyo desarrollo subsisten serias dificultades.

En este sentido se coincide con Jungk (1982), al referirse que:

Con el pensamiento geométrico espacial se deben desarrollar tres capacidades íntimamente relacionadas entre sí: la vista espacial, la representación espacial y la imaginación espacial, se precisan, además, de acuerdo a los intereses de esta investigación, las capacidades de imaginación, reproducción y de construcción espacial.

Sobre esta base, existe un bajo desarrollo de la capacidad de imaginación espacial en los estudiantes de duodécimo grado. Lo anterior, conlleva a que estos presenten muchas dificultades para analizar el plano, las relaciones en el espacio y viceversa. De acuerdo con Proenza (2002, p.10), esta se define como “la capacidad de estudiar el plano y el espacio a través de sus conceptos, leyes y derivar razonamientos; por lo que va más allá de la Geometría para erigirse como un pensamiento dialéctico por excelencia”

Desde esta mirada, resulta significativo señalar que esta forma del pensamiento matemático no se limita a identificar de forma visual figuras geométricas y conocer su nombre. Por su parte Proenza (2002), precisa que este exige del estudiante la exploración consciente del espacio, la comparación de los elementos observados, el establecimiento de relaciones entre ellos y la expresión verbal de las acciones realizadas y de las propiedades observadas. De ahí que interiorizar el conocimiento, descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones, construir modelos, elaborar conclusiones para llegar a formular leyes generales y resolver problemas.

Otros autores, Feria et al. (2006), Frostig (1978), Horne (1978), Hoffer (1981) (citados por Uribe, 2014), han aportado variadas habilidades de percepción espacial: la coordinación visomotriz, la percepción figura-fondo, la constancia perceptual, la percepción de posición en el espacio, la percepción de las relaciones espaciales, la discriminación visual y la memoria visual. En sus estudios, se revela a opinión de este autor, que son parte de la base sensorial que deben tener los estudiantes.

De ahí que la coordinación visomotriz, se relaciona con la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo. La percepción figura-fondo es el acto visual de identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo). Por otra parte, se encuentra la constancia perceptual (constancia figura y tamaño), que es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes. Estas son, el tamaño y la forma, a pesar de la variabilidad de sus impresiones cuando son observadas desde diferentes puntos de vista.

Sobre esta base, la percepción de la posición en el espacio, que es “la capacidad para determinar la relación de un objeto con relación a otro y al observador” (Feria et al., 2006, p.28). Por otro lado, aparece, la percepción de relaciones espaciales, que “se relaciona con la destreza para ver dos o más objetos en relación con uno mismo o entre ellos, y está estrechamente ligada en algunas tareas con la percepción de la posición en el espacio” (Feria et al., 2006, p.28).

Por último, se encuentra la discriminación visual, que hace referencia a: La disposición para distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos y la memoria visual. Esto, implica la habilidad para recordar con precisión un objeto que no está más a la vista y luego relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no, según (Hoffer, 1981).

Por otra parte, se debe señalar el hecho de que estas habilidades no están en términos de saber hacer, sino que son expresión de procesos cognoscitivos. En consonancia con (González, 2001), tales como, la percepción, la memoria, el pensamiento, entre otros, inherentes a las capacidades. Estos, no reflejan acciones concretas, realizables y medibles. Por tanto, no describen operaciones y procederes detallados que orienten al profesor hacia su desarrollo.

En este sentido, uno de los resultados que puede contribuir a la precisión de habilidades del pensamiento geométrico espacial es la descripción que realiza. De acuerdo con McGee (1979) (citado por Fernández, 2011, p.27) de diez habilidades, distribuidas en los dos grupos siguientes:

#### Habilidades de visualización espacial:

- 1) Habilidad para imaginar la rotación de un objeto, la representación de un objeto y los cambios relativos de posición de objetos en el espacio.
- 2) Habilidad para visualizar una configuración en la cual hay un movimiento entre sus partes.
- 3) Habilidad para comprender movimientos imaginarios en tres dimensiones y para manipular objetos en la imaginación.
- 4) Habilidad para manipular o transformar la imagen de un patrón espacial en otra disposición.

#### Habilidades de orientación espacial

- 1) Habilidad para determinar relaciones entre diferentes objetos espaciales.
- 2) Habilidad para reconocer la identidad de un objeto cuando es visto desde diferentes ángulos o cuando el objeto se mueve.
- 3) Habilidad para considerar relaciones espaciales donde la orientación del observador es esencial.
- 4) Habilidad para percibir patrones espaciales y para compararlos entre ellos.
- 5) Capacidad para permanecer sin confusiones por las diversas orientaciones en la que un objeto puede ser presentado.
- 6) Habilidad para percibir patrones espaciales o mantener la orientación respecto de los objetos en el espacio.

De acuerdo con los autores referenciados anteriormente, se dedican a explicar de forma abstracta las habilidades de la etapa sensorial en el desarrollo del pensamiento geométrico espacial. En la mayoría de sus trabajos, se dedican a la propuesta de ejercicios reproductivos en los que los estudiantes observan un objeto, describen sus características, su forma, entre otros. Sin embargo, no

centran su atención en cómo desarrollar esas habilidades en el proceso de enseñanza-aprendizaje. De manera que sus estudios, no aportan procedimientos, métodos, estrategias, ni metodologías con ese fin. Asimismo, no las contextualizan al proceso de resolución de problemas geométricos de la geometría del espacio, que va mucho más allá de la simple percepción de los objetos o figuras geométricas.

Por ello, en el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial juega un papel esencial los procesos de visualización. En consonancia con Clements y Battista (2001), estos integran los procesos a través de los cuales se obtiene conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones. Estas valoraciones, apuntan a la necesidad de determinar las habilidades que permitan la realización de estos procesos de representación, construcción y manipulación de los objetos tridimensionales, cuestión que no se esclarece suficientemente en la bibliografía consultada.

Castiblanco et al. (2004, p.14), señalan que:

La construcción geométrica puede ser descrita como un dibujo técnico, en el que la utilización de determinados instrumentos, puede asegurar la adecuación del dibujo a determinadas propiedades. Esta tiene dos propósitos esenciales: asegurar que se cumplan las propiedades geométricas, superando así las limitaciones de la percepción, necesariamente presentes en el dibujo y realizar una generalización que asegure la reproducción del dibujo, teniendo en cuenta únicamente las propiedades fundamentales del mismo por medio del uso de instrumentos técnicos.

Sin embargo, se considera que la construcción geométrica no es solo dibujar por los estudiantes una figura espacial sobre la hoja de papel. Esta, también es la construcción con sus propias manos o con la ayuda de un asistente matemático. Para ello, se toma en cuenta sus propiedades fundamentales. En este aspecto, radica la importancia de la construcción geométrica como motor impulsor del pensamiento deductivo.

Sobre esta base, se asumen las ideas de Castiblanco, et. al (2004), quienes expresan que el estudiante puede descubrir, a través de la construcción geométrica, propiedades que no tuvo en cuenta. Esto, le permite detectar que hay una relación de implicación entre las propiedades que tuvo en cuenta y las que descubrió después.

Por su parte el Modelo de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1990), tiene cada vez mayor aceptación a nivel internacional en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. De ahí que, constituye otro de los referentes teóricos que posibilitan la determinación y precisión de habilidades del pensamiento geométrico espacial. En este modelo Van Hiele propone cinco niveles de desarrollo del pensamiento geométrico, a saber:

**Nivel 1.** Es el nivel de la visualización, llamado también de familiarización o reconocimiento, en el que el estudiante percibe las figuras geométricas en su

totalidad, de manera global, sin detectar relaciones entre tales formas o entre sus partes.

De manera que los estudiantes perciben las figuras como objetos individuales. Por tanto, son capaces de generalizar las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase. De ahí que se limitan a describir su aspecto físico, los reconocen, los diferencian o los clasifican sobre la base de las semejanzas o diferencias físicas entre ellos. No obstante, no suelen reconocer explícitamente las partes que los componen ni sus propiedades matemáticas.

En este nivel, los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son clases de figuras reconocidas visualmente como de la misma forma.

**Nivel 2.** Es un nivel de análisis, de conocimiento de las componentes de las figuras, de sus propiedades básicas.

Estas propiedades son comprendidas a través de observaciones efectuadas durante trabajos prácticos como mediciones, dibujo, construcción de modelos, etcétera. Por ello, en este nivel los objetos sobre los cuales los estudiantes razonan son las clases de figuras y piensan en términos de conjuntos de propiedades que asocian con estas.

**Nivel 3.** Llamado de ordenamiento o de clasificación. Las relaciones y definiciones empiezan a quedar clarificadas, pero sólo con ayuda y guía. Ellos pueden clasificar figuras jerárquicamente mediante la ordenación de sus propiedades y dar argumentos informales para justificar sus clasificaciones. Comienzan a establecerse las conexiones lógicas a través de la experimentación práctica y del razonamiento.

En este nivel, los objetos sobre los cuales razonan los estudiantes son las propiedades de clases de figuras.

**Nivel 4.** Es de razonamiento deductivo; en él se entiende el sentido de los axiomas, las definiciones, los teoremas, pero aún no se hacen razonamientos abstractos, ni se entiende suficientemente el significado del rigor de las demostraciones.

**Nivel 5.** Es el del rigor; es cuando el razonamiento se hace rigurosamente deductivo. Los estudiantes razonan formalmente sobre sistemas matemáticos. Por ello, pueden estudiar geometría sin modelos de referencia y razonar formalmente manipulando enunciados geométricos tales como axiomas, definiciones y teoremas.

Por la importancia que tienen estos niveles en el desarrollo del pensamiento geométrico. De manera que en la bibliografía consultada y en los trabajos de los autores anteriores, no se realizan aportes en cuanto a qué habilidades del pensamiento geométrico espacial se desarrollan en cada uno de estos niveles. Sobre esta base, las habilidades que estos declaran quedan en los niveles 1 y 2, es decir, de visualización y de análisis, respectivamente. Lo anterior, limita el aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos de la geometría del espacio. Esto, implica un proceso que necesita del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en los restantes niveles, según

Van Hiele (de ordenamiento o clasificación, de razonamiento deductivo y el de rigor).

En este sentido, los niveles del modelo de Van Hiele, la mayoría de los estudiantes de la educación preuniversitaria en Cuba deberían arribar a esta educación en los niveles cuatro y cinco. Por tanto, en las educaciones primaria y secundaria básica, se estudian las figuras geométricas planas y espaciales, sus propiedades, las relaciones entre ellas y las han clasificado y definido formalmente.

Para la realización del estudio exploratorio sobre el estado actual del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en los estudiantes del IPU "Mártires del Porvenir" del municipio de Diez de Octubre en la provincia de La Habana, se consideró como población disponible a los 603 estudiantes y los 10 profesores de Matemática de este IPU en el curso escolar 2016-2017. Como muestra aleatoria estratificada por afijación proporcional, se seleccionó el 30% del total de estudiantes de cada grado, lo que equivale a 68 estudiantes de décimo grado, 48 de onceno y 65 de duodécimo grado, así como a los mismos 10 profesores de Matemática ya mencionados.

Para la valoración de las principales insuficiencias en el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial se tuvo en cuenta el análisis de resultados de los estudiantes de duodécimo grado. Para ello, se tuvo en cuenta los instrumentos como pruebas de ingreso de Matemática a la Educación Superior, pruebas pedagógicas finales y cuestionario de encuesta a estos profesores y la guía de entrevista a metodólogos municipales de Matemática realizadas a la muestra declarada. Las regularidades detectadas en los instrumentos aplicados, revelaron que es pertinente realizar un análisis de los programas de la asignatura en el preuniversitario y de las orientaciones metodológicas.

Para ello, se precisaron los indicadores siguientes: conocimientos de los profesores sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial y sobre las vías para la conducción de su desarrollo, preparación de los estudiantes para resolver problemas de geometría del espacio y precisión de orientaciones metodológicas a los profesores para conducir el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial.

Del análisis de los instrumentos aplicados se pudo constatar lo siguiente:

- En los programas de la asignatura Matemática y en las orientaciones metodológicas de cada uno de los grados del preuniversitario, se pondera el desarrollo del pensamiento lógico de los estudiantes, con énfasis en los procedimientos lógicos. Estos, son necesarios para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial, sin embargo, no resultan suficientes. Asimismo, se hace alusión solo a habilidades como observar y comparar para distinguir propiedades de los objetos y se le da más peso a la abstracción, al razonamiento lógico-deductivo riguroso para demostrar teoremas de la geometría del espacio.

- Por otro lado, se reconoce como lo esencial de la geometría del espacio que los estudiantes conozcan relaciones fundamentales en el espacio y que sean capaces de demostrar propiedades simples y aplicar sus conocimientos a la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración. Como se puede observar no se presta una debida atención al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial que forman parte esencial del proceso de resolución de estos ejercicios y problemas.

En la revisión de las pruebas de matemática a nivel provincial, se constató que en las respuestas a las preguntas relacionadas con la geometría del espacio el 87,7% de los estudiantes de la muestra no establece relaciones lógicas entre las figuras planas presentes en el cuerpo geométrico, el 65,3% no identifica los conceptos de las figuras planas y de los cuerpos geométricos, el 91,2% no aplica correctamente la definición esos conceptos, el 89,1% no identifica propiedades esenciales de las figuras planas y de los cuerpos geométricos, el 90,3% no establece relaciones lógicas entre esas propiedades, el 89,5% no aplica correctamente los teoremas de la planimetría y la estereometría, el 95,6% no deducen con claridad las consecuencias entre las informaciones que se dan en los datos del ejercicio o problema y el 97,6% no establece un ordenamiento lógico de las respuestas a los ejercicios y problemas. La aplicación de la dódima ji-cuadrado de bondad de ajuste para una población, permitió declarar con un 99% de confiabilidad que las frecuencias observadas en estas categorías aquí mencionadas, son marcadas y estadísticamente significativas en relación al resto de las categorías establecidas para cada ítem que se analizó.

Con respecto a las observaciones a clases, estas tuvieron como objetivo constatar el desempeño de los estudiantes en cuanto a la resolución de problemas de la geometría del espacio. Asimismo, el papel del profesor en la conducción del desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial, dentro del proceso de resolución de tales problemas. Para ello, se tuvieron en cuenta los siguientes indicadores:

1. Dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio.
2. Papel del profesor para contribuir al desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial en sus estudiantes, a través de la resolución de ejercicios y problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio.

En relación a la observación a clases se corroboró que los estudiantes presentan serias dificultades para resolver ejercicios, problemas de cálculo y demostración de la geometría del espacio. Sobre esta base, las insuficiencias que presentan para identificar las propiedades de las figuras planas y espaciales presentes en las condiciones de estos, para identificar relaciones entre las propiedades de estas figuras, para deducir consecuencias de los datos, para esbozar una figura geométrica imposibilita comprender mejor las condiciones y exigencias del ejercicio o problema.

Se pudo constatar además, que los profesores no prestan atención al desarrollo de habilidades relacionadas con la vista espacial, la representación espacial y la

imaginación espacial. De ahí que, para ellos lo más importante es que los estudiantes lleguen a la solución del ejercicio o problema, la mayoría de las veces con su ayuda y mediante la utilización de una conversación. Esta, tiende a ser más socrática que heurística, no se atiende a lo interior del proceso de resolución, en el que se manifiestan esas habilidades.

En cuanto a la encuesta a los profesores de Matemática, se obtuvieron los siguientes resultados:

- En la pregunta uno, relacionada con cuáles de las habilidades del pensamiento geométrico espacial utilizan para contribuir al desarrollo en sus estudiantes de este componente del pensamiento matemático, en correspondencia con sus características como estudiantes de preuniversitario, más del 50% reconoce utilizar las habilidades: percepción de las relaciones espaciales, reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes, determinar la relación de un objeto con relación a otro, distinguir semejanzas y diferencias entre los objetos, relacionar sus características con otros objetos que estén ya sea a la vista o no, determinar la relación de un objeto con relación a otro e identificar propiedades de figuras planas (7 de las 15 habilidades presentadas en la encuesta).
- Las restantes 8 habilidades menos del 50% de los encuestados reconoce utilizarlas. Estas últimas son: coordinación visomotriz, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo), recordar con precisión un objeto que no está más a la vista, construir manualmente un cuerpo geométrico, representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo.
- En la pregunta dos, relacionada con conocer cuáles son las razones por las que no utilizan las habilidades que no fueron seleccionadas en la pregunta uno. Por tanto, el 70% expresó que no está familiarizado con ellas, el 80% no comprende en qué consisten, el 100% considera que el estudiante las debe tener desarrolladas desde enseñanzas anteriores, 70% no sabe si las ha utilizado de forma inconsciente, el 30% no las considera necesarias y el 80% no considera que sean habilidades.
- En el caso de la pregunta tres, el 100% coincide en que sus estudiantes presentan las siguientes insuficiencias para resolver problemas de la geometría del espacio: identificar figuras planas y cuerpos geométricos, identificar propiedades de figuras planas, reconocer las relaciones existentes entre las figuras y los cuerpos geométricos, representar cuerpos geométricos mediante un esbozo gráfico, calcular el área y volumen, extraer información de los datos que se dan en las condiciones del problema, relacionar la información que se extraen de los datos, deducir consecuencias de las relaciones entre las informaciones extraídas de los datos, determinar las informaciones y consecuencias que resultan imprescindibles para llegar a la exigencia del problema, elaborar conscientemente un plan de solución, escribir organizadamente la solución del problema y fundamentar los pasos en la solución del problema.

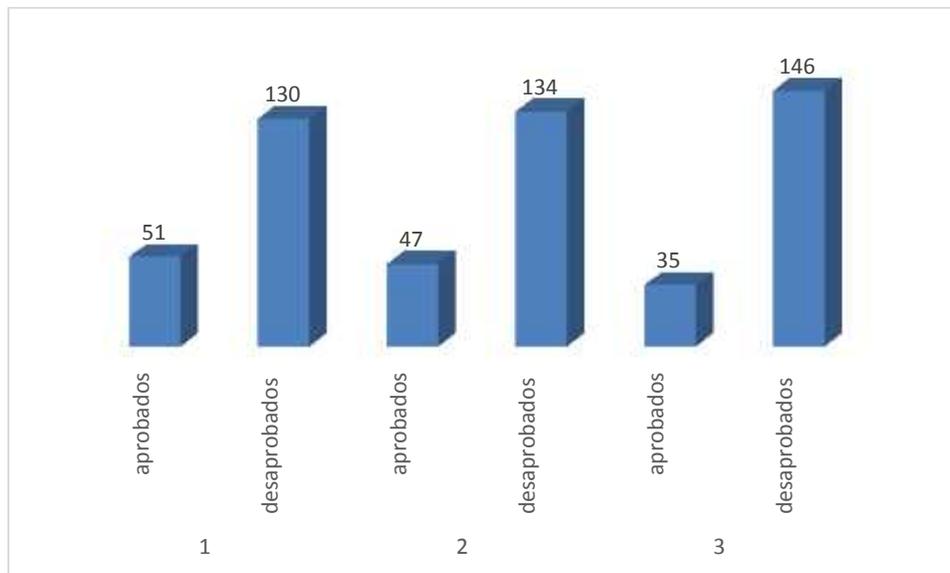
- En la pregunta cuatro, el 100% de los encuestados respondió que no tienen conocimiento de alguna metodología para el desarrollo de habilidades del pensamiento geométrico espacial. Por otra parte, en el caso de la pregunta cinco, el 20% ha recibido preparación teórica o metodológica para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial, no siendo así para el 80%.

También se realizó una entrevista a los metodólogos de Matemática para constatar las limitaciones que, desde el punto de vista metodológico, presentan los profesores de la educación preuniversitaria para conducir el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial de sus estudiantes. Para el desarrollo de la entrevista se les presentó un material a los metodólogos sobre las habilidades del pensamiento geométrico espacial extraídas de la revisión bibliográfica realizada por los autores de este trabajo. Estas les son explicadas detalladamente para que comprendan en qué consiste cada una de ellas.

Los metodólogos entrevistados coincidieron en que las siguientes habilidades no eran frecuentemente utilizadas tanto por ellos como por los docentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría del espacio. De manera que, se resaltan: coordinación visomotriz, percepción figura-fondo, constancia perceptual, percepción de posición en el espacio, identificar una figura específica (el foco) en un dibujo (el fondo), recordar con precisión un objeto que no está más a la vista, construir manualmente un cuerpo geométrico, representar en un plano al cuerpo geométrico en las vistas frontal, lateral, desde arriba y desde abajo. Por tanto, las razones que estos emitieron estuvieron dirigidas esencialmente a la insuficiente preparación teórica y metodológica que tienen y a la poca atención que se ofrece al desarrollo de estas habilidades en los programas y orientaciones metodológicas del preuniversitario.

De igual manera plantean que no conocen una metodología específica para el desarrollo de tales habilidades y que en las preparaciones metodológicas no se abordan temas relacionados con este aspecto.

Otro de los instrumentos empleados fue la aplicación de una prueba pedagógica a los estudiantes, la misma arrojó los siguientes resultados por preguntas:



Se constata a través de esta prueba pedagógica que en las preguntas uno y dos la cantidad de estudiantes aprobados no alcanza los 50 y los desaprobados está por encima de los 120. En este sentido, en la pregunta tres la cantidad de aprobados no alcanza los 40 estudiantes y la cantidad de los desaprobados está por encima de los 140, de un total de 181 estudiantes evaluados.

Al realizar un análisis de la pregunta uno se constata que los estudiantes presentaron limitaciones para identificar las figuras planas que conforman el cuerpo geométrico y al propio cuerpo geométrico. Esto, incide en que no puedan formular definiciones y teoremas asociados a estas figuras geométricas. En la pregunta dos, los estudiantes presentaron dificultades para representar el cuerpo geométrico a partir de las diferentes vistas presentadas. Lo anterior, incidió negativamente en la realización de los demás incisos. En la pregunta tres, las dificultades detectadas en las dos preguntas anteriores se reflejan en las limitaciones de los estudiantes para resolver un problema geométrico de la geometría del espacio, que es el fin principal de la asignatura Matemática en la educación preuniversitaria.

La aplicación de la dócima binomial con aproximación a la distribución normal, permitió declarar con un 95% de confiabilidad que las frecuencias observadas en la categoría de Desaprobados. Por otra, son marcadas y estadísticamente significativas la categoría de Aprobados establecida para cada pregunta que se analizó.

A partir de la aplicación del método de triangulación de fuentes se corroboró que es limitada la atención al desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial por los profesores de Matemática de la educación preuniversitaria. Esto, se evidencia en las insuficiencias de los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de la geometría del espacio.

El estudio exploratorio de la situación actual del desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial revela la necesidad de perfeccionar los programas y orientaciones metodológicas de la asignatura Matemática de la

educación preuniversitaria cubana pues no es abordado explícitamente. Por ello es esencial, elevar la calidad del aprendizaje de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos de la geometría del espacio. Asimismo, la necesidad de preparar desde el punto de vista didáctico a los profesores de Matemática de esta educación en el conocimiento de estas habilidades y en las estrategias y métodos de enseñanza que deben utilizar para desarrollarlas en sus estudiantes.

Los resultados aquí mostrados son consecuencia de la insuficiente preparación teórica y metodológica de los profesores de Matemática. De ahí que, estos no cuentan con una metodología para el desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial. Además, este aspecto no constituye una prioridad de la preparación metodológica que reciben en la provincia, en el municipio y en las escuelas.

La valoración de la situación actual corrobora las limitaciones en el proceso de desarrollo de las habilidades del pensamiento geométrico espacial en la educación preuniversitaria. En este sentido, no solo por las dificultades que presentan los estudiantes en la resolución de ejercicios y problemas de la geometría espacial, sino también por las limitaciones teóricas y metodológicas de los profesores de Matemática.

## REFERENCIAS

- Ballester, S. (1982). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.
- Benítez, M. L. y Cárdenas O. L. (2008). *La enseñanza de la topología a través de la cartografía*. Recuperado de: <http://esrlc.com.ve/ibero2008/iberoamerica/files/CARDENAS%20OSCAR.pdf>
- Bonilla, S., Espinosa, L. B., Feria Uribe, M. A. y Martínez, N. (2006). *Percepción espacial y geometría intuitiva. Propuesta de unidades didácticas*. (s.l.): Universidad Externado de Colombia, Facultad de Ciencias de la Educación.
- Cabralles, Y. y otros. (2017). Procedimiento didáctico para la resolución de problemas matemáticos. Revista Electrónica, *Opuntia Brava*, 9(3).
- Castiblanco, A. C., Urquina, Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá: Instituto Pedagógico Nacional.
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (2001). *Logo and Geometry*. Journal for Research in Mathematics Education Monograph, V. A: National council of Teachers of Mathematics.
- Feria Uribe, M. A., Espinosa, L. B. y Martínez, N. (2006). *Percepción espacial y geometría intuitiva. Una puerta de entrada al aprendizaje significativo de la geometría*. Universidad Externado de Colombia, Facultad de Ciencias de la Educación.

- Fernández, M. T. (2011). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Tesis doctoral. Recuperado de [www.ugr.es/~jgodino/Tesis\\_doctorales/Teresa\\_Fernandez\\_tesis.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Teresa_Fernandez_tesis.pdf)
- González, M., Castellanos, D., Córdova, D., Rebollar, M., Fernández, A. M., Martínez, M.,...Pérez, D. (2001). *Psicología para educadores*. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.
- Hoffer, A., (1981): *Geometry is more than Proof*, en *The Mathematics Teachers*, vol. 74, n.º 1, pp. 11-18.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de Van Hiele*. En: Llinares, S., y Sánchez, M. V. (eds.), *Teoría y práctica en educación matemática*. Sevilla. p. 295-384.
- Jungk, W. (1982). *Conferencias sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tres partes*. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.
- Malagón, J. (1998), "Clase de Matemáticas", en *la construcción de la confianza. Una experiencia en proyectos de aula*. Bogotá.
- Proenza, Y. (2002). *Modelo didáctico para el aprendizaje de los conceptos y procedimientos geométricos*. Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas. Instituto Superior Pedagógico "José de la Luz y Caballero". Holguín.
- Sánchez, N., y Bonilla, M. (1998). *Matemáticas escolares asistidas por computador. Actividades en el aula. Módulo 3, Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas*. Bogotá: Universidad Distrital.
- Uribe, S. M., Cárdenas, O. L., Becerra, J. F. (2014). *Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños*. *Revista Educación Matemática*. (26), 2. Agosto. pp. 135-160.