Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Trigonometría significativa y metacognición

Significant trigonometry and metacognition

Arisdorgan Diéguez Almaguer[1] arisdorgandieguez@gmail.com. https://orcid.org/0000-0001-8361-7599

Mario Adelfo Batista Zaldívar[2] mariobatzal69@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-1623-0332

Hilter Farley Figueroa Saavedra[3] hfigueroasavedra@gmail.com https://orcid.org/0000-0002-7395-8944

Resumen

El artículo aborda conocimientos generales sobre el constructivismo, conocimiento significativo y metacognición, los que constituyen el fundamento teórico para el desarrollo metodológico de un proceso de enseñanza-aprendizaje alternativo para la trigonometría, de manera más significativa y coherente. Para ello parte de contenidos elementales de geometría plana, como distancia entre dos puntos, teorema de Pitágoras y semejanza de triángulos para inducir las razones trigonométricas, deducir las tablas trigonométricas y las fórmulas de reducción al primer cuadrante. Esta propuesta ayuda al estudiante a aprender de manera más fácil, no solo la trigonometría, sino que brinda un método basado en el razonamiento lógico, donde se evidencia la relación causa-efecto, desde lo simple a lo complejo, y la comprobación de los principales fenómenos, que es útil para enfrentar tareas cognitivas en ámbitos más amplios.

Palabras claves: constructivismo, metacognición, conocimiento significativo, trigonometría, fórmulas de reducción.

Abstract

The article deals with general knowledge about constructivism, significant knowledge and metacognition, which constitute the theoretical basis for the methodological development of an alternative teaching-learning process for trigonometry, in a more meaningful and coherent way. In order to do so, it starts from elementary contents of flat geometry, such as distance between two points, Pythagoras theorem and similarity of

---

[1] Máster en Nuevas Tecnologías para la Educación. Universidad de Holguín “Oscar Lucero Moya” (UHO), Holguín, Cuba. Profesor e investigador de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Extensión Norte Amazónica, Francisco de Orellana, Orellana, Ecuador.
[2] Doctor en Ciencias Técnicas (PhD). Instituto Superior de Tecnologías y Ciencias Aplicadas (INsTEC). Profesor e investigador del Instituto de Ciencas Básicas de la Universidad Técnica de Manabí (UTM), Portoviejo, Manabí, Ecuador
[3] Ingeniero. Máster en Gerencia y Administración Agropecuaria. Universidad Estatal de Cuenca, Ecuador. Profesor e investigador de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Extensión Norte Amazónica, Francisco de Orellana, Orellana, Ecuador

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

triangles to induce trigonometric ratios, deduce trigonometric tables and reduction formulas to the first quadrant. This proposal helps the student to learn in an easier way, not only trigonometry, but also provides a method based on logical reasoning, where the cause-effect relationship is evidenced, from the simple to the complex, and the verification of the main phenomena, which is useful to face cognitive tasks in broader fields.

Key words: constructivism, metacognition, significant knowledge, trigonometry, reduction´s formulas.

Introducción

El papel que desempeñan las ciencias básicas, y entre ellas la Matemática, en la sociedad actual es cada día más relevante, y esta tendencia continuará en ascenso como consecuencia inevitable del avance científico-técnico; sin embargo, resulta preocupante y contradictorio que de manera general, los niveles de comprensión y asimilación de los contenidos de esta ciencia continúen siendo bajos, y directivos, docentes, padres y estudiantes ven con desaliento cómo el número de reprobados, lejos de disminuir, se incrementa; lo cual provoca la decepción y la deserción en las universidades, e incrementa los costos sociales y, en muchos casos, estudiantes que logran graduarse y aún manifiestan no saber para qué recibieron determinados contenidos, porque los ven completamente divorciados de la realidad.

Hoy la ciencia y la tecnología han alcanzado avances insospechables para los hombres de hace dos o tres siglos atrás, se producen y aplican nuevos conocimientos a pasos agigantados en muchos ámbitos, pero en el caso de la pedagogía y la didáctica no es así, existe un cierto rezago de estas con respecto al desarrollo en otras esferas sociales, y lo que resulta peor, los conocimientos existentes en estas dos últimas ciencias son ignorados o no aplicados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pues los docentes enseñan del mismo modo que fueron enseñados, y reproducen métodos viejos y fracasados, métodos que para nada permiten que los estudiantes lleguen a la esencia de los fenómenos y, mucho menos, logren su desarrollo metacognitivo.

En la mayoría de los casos, las clases de Matemática son una mera exposición de fórmulas, teoremas y relaciones en una sola dirección, donde el estudiante desempeña un papel pasivo, memoriza y reproduce conocimientos no significativos para él, y el docente no toma en cuenta que a medida que enseña los contenidos de su asignatura, debe además propulsar a su discípulo a un plano intelectual superior, y ayudarle a desarrollar estrategias cognitivas que le sirvan para todas las asignaturas y para la vida en general; pues el estudiante debe aprender a aprender.

Desarrollo

Conocimiento significativo y metacognición.

Para referirse a los términos: conocimiento significativo y metacognición, resulta imprescindible, primero, hablar de la teoría constructivista de Piaget como precursora

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

de las dos categorías anteriores, quien trata de dar explicación a lo largo de su obra al problema del origen del conocimiento y su evolución: "para dar respuesta a este problema es necesario remitirse a cómo el conocimiento aparece y se transforma a lo largo del desarrollo hasta llegar a las formas propias del adulto" (Piaget, 1970, p. 38).

Piaget concede un papel fundamental a la acción en este proceso de origen y desarrollo, para conocer los objetos el sujeto tiene que actuar sobre ellos, desde este punto de vista la acción es el fundamento de toda actividad intelectual, desde las más simples hasta las más complejas: "para Piaget, el conocimiento está unido a la acción, a las operaciones; es decir, a las transformaciones que el sujeto realiza sobre el mundo que le rodea" (Delval, 1996, p. 106-107).

"El conocimiento no radica ni en el objeto ni en el sujeto por separado, sino que este aparece como resultado de la interacción entre ambos" (Flavel, 1977, p. 24); o sea, que la intelectualidad es el producto de un gradual ajuste entre el sujeto y su entorno, a través del intercambio dinámico, donde el sujeto construye y reconstruye sus estructuras intelectuales que le permiten comprender cada vez de manera más precisa la realidad. "Según Piaget el objeto es conocido a través de aproximaciones sucesivas y exige una elaboración por parte del sujeto" (Flavel, 1977, p. 24), por lo que el conocimiento no es la mera incorporación de hechos y fenómenos a través de los órganos de los sentidos, sino una construcción compleja, donde el sujeto crea, organiza, reorganiza y enriquece sus estructuras cognitivas.

"Piaget también distingue en el conocimiento, los procesos complementarios de asimilación y de acomodación" (Flavell, 1977, 24-25), así "la asimilación es la integración de elementos exteriores a estructuras intelectuales en evolución o ya acabadas" (Flavell, 1977, 24-25), en otras palabras, el sujeto acude al mundo con conocimientos ya construidos, los utiliza para atribuir significado, para comprender la realidad circundante e incorporar la compresión sobre dicha realidad a las estructuras previas de conocimiento.

Sin embargo, la asimilación no garantiza por sí sola las variaciones en las estructuras de conocimientos, necesita de otro proceso que le posibilite el cambio y la optimización de las estructuras mentales, este es el de acomodación. Se entiende por ello, a la modificación que en menor o mayor grado se produce de las estructuras cognitivas, cuando se utilizan para dar significado a nuevos objetos y ámbitos de la realidad. "Según Piaget, los objetos ofrecen cierta resistencia a ser asimilados por estructuras intelectuales ya construidas, por lo que el sujeto debe acomodar sus estructuras para que pueda también comprender nuevos objetos" (Flavell, 1977, 24-25).

Debe existir un equilibro entre asimilación y acomodación, no hay acomodación sin asimilación, ni asimilación sin acomodación; el sujeto parte de una estructura previa asimiladora y cada vez que asimila algo se producen cambios en la estructura inicial, pero estas acomodaciones se realizan dentro de ciertos límites, regidos por la necesidad de conservar en cierta medida la estructura asimiladora inicial.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Al tomar como base los postulados anteriores, la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel ofrece un marco apropiado para el desarrollo de la labor educativa, pues plantea que el aprendizaje depende de la estructura previa que se relaciona con la nueva información, y se define como dicha estructura cognitiva al conjunto de conceptos e ideas que el individuo posee en un determinado campo del conocimiento, así como su organización.

En el proceso de enseñanza que desarrolla el docente resulta de vital importancia que este conozca la estructura cognitiva del estudiante, no se trata solo de la cantidad de información que posee, sino de cuáles son los conceptos y proposiciones que maneja, así como su grado de estabilidad, y se debe considerar siempre que la labor educativa no se desarrolla con mentes en blanco, que el aprendizaje de los estudiantes no comienza de cero, si no que los estudiantes tienen experiencias que pueden afectar su aprendizaje o ser aprovechadas para potenciar el mismo.

"Un aprendizaje es significativo cuando los contenidos son relacionados de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el estudiante ya sabe" (Ausubel, 1983, p. 18). Es decir, que las ideas y nuevas informaciones encuentran un vínculo estrecho con conocimientos ya existentes en la estructura cognoscitiva del estudiante, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición y de algún modo reestructuran la intelectualidad previa.

Esto refleja la importancia de considerar lo que el individuo ya sabe para establecer la relación con lo que debe aprender, de este modo el estudiante ve el conocimiento como el gran sistema que es, sin elementos aislados o poco relacionados, que sirven de muy poco en la solución de problemas reales o como puntos de partida para la asimilación de nuevos conocimientos, y lo que es más importante, le sirven de casi nada en el desarrollo de estrategias que posibiliten realizar de manera óptima su aprendizaje, no solo de una asignatura determinada, sino su aprendizaje en todos los ámbitos de la vida.

Respecto al conocimiento significativo Ausubel (1983) afirma:

> (…) El aprendizaje significativo ocurre cuando una nueva información "se conecta" con un concepto relevante ("subsunsor") pre existente en la estructura cognitiva, esto implica que, las nuevas ideas, conceptos y proposiciones pueden ser aprendidos significativamente en la medida en que otras ideas, conceptos o proposiciones relevantes estén adecuadamente claras y disponibles en la estructura cognitiva del individuo y que funcionen como un punto de "anclaje" a las primeras (Ausubel, 1983, p. 37).

La característica más importante del aprendizaje significativo es que,

> (…) se produce una interacción dinámica y desarrolladora entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva inicial y los nuevos conocimientos, de tal modo que éstos adquieren un significado y son integrados a la estructura cognitiva de manera no arbitraria, de este modo favorecen la diferenciación, evolución y estabilidad de los subsunsores pre existentes y consecuentemente de toda la estructura cognitiva (Ausubel,

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

1983, p.38).

En contraposición, “el aprendizaje mecánico se produce cuando no existen subsensores adecuados, de tal forma que la nueva información es almacenada arbitrariamente, sin interactuar con conocimientos pre-existentes” (Ausubel, 1983, p. 37). En este tipo de aprendizaje la información se almacena en forma de islas, completamente desvinculados unos contenidos de otros, y suele ocurrir que se olvida fácilmente, pues su periodo de permanencia en la memoria es por lo general corto, pues el estudiante no puede utilizar unos conocimientos para llegar a otros, nunca se llega a la esencia de los fenómenos, el estudiante solo es capaz de reproducir dicha información y casi nunca puede utilizarla creativamente para resolver problemas o generar nuevos conocimientos.

Por su parte la metacognición, no solo se ocupa de explicar cómo el hombre aprende, sino también de cómo este proceso se puede hacer eficientemente, a través del conocimiento que debe tener el estudiante de sí mismo, de sus fortalezas y debilidades, del conocimiento de cuánto sabe y cuánto debe saber, de cuáles son las estrategias a seguir para enfrentar una tarea cognitiva, por ello está en un plano superior con respecto a todas las categorías anteriores.

“La metacognición es una de las áreas de investigación que más ha contribuido a la configuración de las nuevas concepciones del aprendizaje y de la instrucción” (Glaser, 1994, citado en OSSES, 2008, p. 5). A medidas que el constructivismo ha ganado un lugar cada vez más importante entre las concepciones del aprendizaje, se ha incrementado el papel que se atribuye a la conciencia que tiene el sujeto y a la regulación que él mismo ejerce de su propio aprendizaje.

La metacognición, por un lado, se refiere “al conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos o cualquier otro asunto relacionado con ellos y, por otro, a la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos” (Flavell, 1976, p. 232). Así, por ejemplo, se practica la metacognición cuando se tiene conciencia de la mayor dificultad para aprender un tema que otro; cuando es principio inviolable la no aceptación de dogmas y se comprende que se debe verificar un fenómeno antes de aceptarlo como ciencia; cuando se piensa que es preciso examinar todas y cada una de las alternativas en una elección múltiple antes de decidir cuál es la mejor, cuando se advierte que se debería tomar nota de algo porque puede olvidarse.

Roa (2016) plantea que “la metacognición se refiere al conocimiento, concientización y control de los propios procesos cognitivos durante el acto de aprender por parte del estudiante” (Roa, 2016, p. 3).

Carretero (2001), explica que:

> (…) la metacognición como el conocimiento que las personas construyen respecto del propio funcionamiento cognitivo”. Un ejemplo de este tipo de conocimiento sería saber

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

> que, la organización de la información en un esquema favorece su recuperación posterior. Por otra parte, relaciona la metacognición a operaciones cognitivas relacionadas con los procesos de supervisión y de regulación que las personas ejercen sobre su propia actividad cognitiva cuando se enfrentan a una tarea cognitiva. (Carretero, 2001, p.7).

La anterior concepción se puede ejemplificar cuando, para memorizar una fórmula matemática, un estudiante selecciona como estrategia, en su proceso de demostración realizado por el profesor, destacar situaciones especiales que le permitan recordar los elementos fundamentales de dicha fórmula, luego organizar estos en un esquema y evalúa el resultado obtenido para decidir nuevas estrategias de ser necesarias.

En la definición anterior se hace una distinción entre conocimiento metacognitivo y control metacognitivo, relacionados con el conocimiento declarativo “saber qué” y el conocimiento procedimental “saber cómo”, de este modo diferencia dos componentes de la metacognición: uno de naturaleza declarativa (conocimiento metacognitivo) y otro de carácter procedimental (control metacognitivo o aprendizaje auto regulado).

Referente a lo anterior, generalmente las actividades desarrolladas por los estudiantes en el aula van dirigidas al aprendizaje de determinados contenidos, muchas veces no saben qué deben saber y los esfuerzos dirigidos al cómo aprender, y al control metacognitivo, son nulos.

El conocimiento metacognitivo trata del conocimiento que tenemos de nosotros mismos, de nuestras fortalezas y debilidades cognitivas, de nuestras características que pueden favorecer o entorpecer el logro exitoso de una tarea cognitiva; además del conocimiento que tengamos de la tarea en cuestión, esto se refiere a cuáles son los objetivos de la tarea y cualquier otra característica relevante de la misma; por último, el conocimiento de las diferentes estrategias cognitivas y bajo qué condiciones son más efectivas de acuerdo a nuestra experiencia y características personales; o sea, debe existir un proceso de personalización o diferenciación cuando se enfrenta una tarea.

“En cuanto al control metacognitivo o aprendizaje autorregulado, la idea básica es que el aprendiz competente es un participante intencional y activo, capaz de iniciar y dirigir su propio aprendizaje y no un aprendiz reactivo” (Arguelles y Nagles, 2007, en OSSES, 2008, p. 6). El aprendizaje autorregulado tiene, por tanto, metas claras y bien definidas, y un efectivo control por parte del propio sujeto que aprende.

Una manera diferente de enseñar trigonometría.

Uno de los contenidos que más dificultades causan a estudiantes y profesores en las aulas son los referidos a la trigonometría, esto es debido, en gran medida, a los métodos de enseñanza utilizados, que se basan fundamentalmente en el uso y abuso de la memoria mecánica, pues los estudiantes repiten razones e identidades trigonométricas, sin atribuir significado alguno a las mismas, y todo se olvida fácilmente. Son bien conocidos y utilizados algunos recursos nemotécnicos, a través de frases, para ayudar a recordar valores, fórmulas y signos de estas funciones en los diferentes

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

cuadrantes del sistema de coordenadas rectangulares en el plano, pero estos carecen de fundamento científico y no se relacionan lógicamente con conocimientos matemáticos precedentes, ni con la realidad.

Cuando a un estudiante, e inclusive a un profesional graduado con resultados relevantes, se le pregunta: ¿qué es el seno de un ángulo?, la mejor respuesta que da es que es igual al cateto opuesto sobre la hipotenusa, y nada sabe sobre que es una forma de medir ángulos, no aporta nada empírico, la causa fundamental de esto es que así, por lo general, comienza el tratamiento metodológico de la trigonometría en la escuela.

Para introducir estos conocimientos se parte de definir las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo de manera arbitraria; sin embargo, una forma de realizarlo significativamente, puede ser a través de una situación problémica, que sitúa al estudiante en la posición de un investigador mediante la siguiente actividad, que se revisa y discuten las posibles soluciones varios días después.

Considere que usted vive en la sociedad antigua, donde no existen los instrumentos de medición que tradicionalmente se usan en el aula, solamente cuenta con una regla graduada para medir la longitud de segmentos y construir un ángulo recto. ¿Cómo usted en estas condiciones mide los ángulos?

La solución a este problema coincide con los métodos empleados por los matemáticos antiguos para resolver problemas similares, como es el caso de Hiparco de Nicea (siglo II AC), uno de los padres de la trigonometría, quien construyó las tablas de cuerda, precursoras de las tablas trigonométricas actuales (Montalvo, 2012). Para ello relacionaba las medidas angulares con longitudes de cuerdas, dividió una semicircunferencia de radio r en partes iguales, estas subdivisiones determinan ángulos que van incrementando sus amplitudes en una cantidad constante con respecto a su antecesor, luego hacía corresponder a cada ángulo la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central y la semicircunferencia (esta tabla es similar a la tabla moderna del seno). No se conoce la longitud que utilizó Hiparco para el radio, pero 300 años después el astrónomo griego Tolomeo empleó r=60 (los griegos usaban el sistema numérico de base 60 de los babilonios).

A finales del siglo VIII, los astrónomos árabes continuaron con los estudios de trigonometría heredados de los griegos, y ya en el siglo X habían completado varias funciones trigonométricas, descubren y demuestran varios teoremas fundamentales de la trigonometría e introducen en uso de r=1, lo que da lugar a las funciones trigonométricas actuales.

Resulta importante ir a la génesis del conocimiento para orientar adecuadamente los objetivos de la tarea cognitiva, y proveer a los estudiantes de experiencias que les ayuden a comprender la esencia de estos conocimientos, además de ser un modo eficaz para motivarlos, y que sus respuestas al problema formulado cubran las expectativas. Algunas respuestas a la interrogante formulada son:

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Arisdorgan Diéguez Almaguer
Mario Adelfo Batista Zaldívar
Hitler Farley Figueroa Saavedra

La medida adecuada puede ser la distancia entre sus lados.

Esta solución no es buena porque los lados de un ángulo tienen un punto en común (el vértice) y la distancia entre ellos es cero, con este método, todos los ángulos son iguales.

La medida puede ser la distancia entre dos puntos, que pertenecen cada uno a un lado diferente del ángulo (Figura 1).

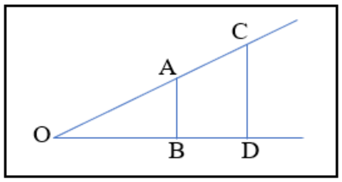


Figura 1 – Propuesta de solución al problema

Respecto a este método se le comenta al estudiante, que es mejor que el primero, pero como se observa en la figura 1, el ángulo AOB tiene infinitas medidas, que no cumple con la condición de unicidad, por lo que medir de este modo, no resulta conveniente ni adecuado, se destaca la importancia de fijar uno de los dos puntos a una distancia constante del vértice del ángulo.

Las respuestas presentadas son disímiles, pero el profesor debe guiar el trabajo hasta obtener el siguiente método.

Si se fija un punto A sobre cualquiera de los dos lados del ángulo, a una distancia de uno (1) del vértice O, y se traza una perpendicular al otro lado que pase por A (punto de perpendicularidad B), entonces la distancia entre A y B, cumple con las condiciones para ser una medida apropiada para el ángulo (Figura 2).

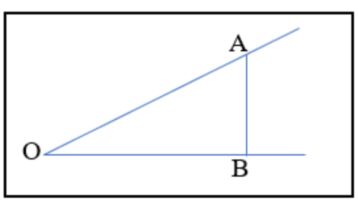


Figura 2 – Solución acertada para el problema.

Segmento OA = 1

Ángulo OBA: recto

Medida del ángulo = distancia entre A y B

Se les muestra a los estudiantes que cuando un ángulo está entre cero y noventa grados, cuanto mayor es su amplitud, mayor es su medida mediante este método, por lo que es un buen indicativo de la amplitud de un ángulo (Figura 3).

Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

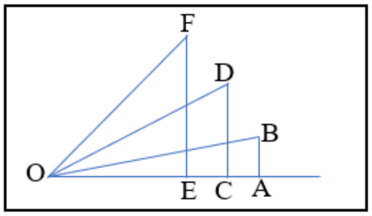


Figura 3 – Variación de la medida del ángulo del primer cuadrante.

Así el ángulo AOB < ángulo COD < ángulo EOF.

Se informa a los estudiantes que este es un método muy antiguo de medir los ángulos, que a esta medida se denomina seno del ángulo y que se utiliza mucho en Matemática, junto al seno del ángulo tambien se usa el coseno, que es la longitud del segmento OB de la figura 2 y que existe toda una rama de la Matemática basada en estas formas de medir los ángulos: la Trigonometría.

Con este tratamiento metodológico se logra que, el nuevo conocimiento se construya sobre la base de conocimientos precedentes muy elementales, como es el concepto de distancia entre dos puntos, además de potenciar la interacción entre el objeto de conocimiento y el sujeto, y el papel de la acción, el sujeto aprende tranformando la realidad que le rodea, los nuevos conocimientos pasarán a formar parte de la estructura cognitiva de los estudiantes de manera no arbitraría, por lo que la enrriquecerán y la reacomodarán positivamente.

También constribuirá a la formación de estrategias cognitivas, porque el método busca la esencia más profunda del fenómeno, pues parte de algo bien simple; modelo este que puede servir para enfrentar otras actividades cognitivas de otras asignaturas y situaciones de la vida en general, y para ello se estimula a los estudiantes para que expliquen cómo razonaron para encontrar el método de solución del problema.

Luego se pasa a definir las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, mediante la siguiente actividad.

Sea ABC un triángulo cuyo ángulo de vértice C es recto (Figura 4).

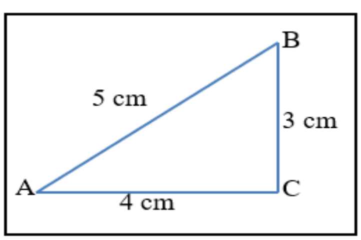


Figura 4 – Triángulo rectángulo para introducir las razones trigonométricas.

Con los datos que se muestran en la figura 4, se pide a los estudiantes que calculen el

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Arisdorgan Diéguez Almaguer
Mario Adelfo Batista Zaldívar
Hitler Farley Figueroa Saavedra

seno y el coseno del ángulo con vértice en A.

Este ejercicio tiene como objetivo inducir la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Los estudiantes se encuentran con el problema que ahora la distancia entre A y B no es uno (1), por lo que deberán aplicar los conocimientos precedentes sobre semejanza de triángulos para resolverlo, el profesor debe guiarlos a través de preguntas.

Al dividir los tres lados de un triángulo por un número entero positivo k mayor que uno, obtenemos otro de menor longitud en sus lados, pero con sus ángulos respectivamente iguales a los ángulos del primer triángulo; o sea, los triángulos son semejantes y la razón de semejanza es igual a $\frac{1}{k}$. Se pregunta a los estudiantes cómo obtener un triángulo semejante al ABC, cuya hipotenusa sea igual a uno (1), y se llega a la conclusión que se dividan los tres lados por cinco (5), la longitud de la hipotenusa, entonces se generaliza, que para obtener un triángulo rectángulo de hipotenusa uno (1), semejante a cualquier otro triángulo rectángulo dado, solo hay que dividir los tres lados por la longitud de la hipotenusa (Figura 5).

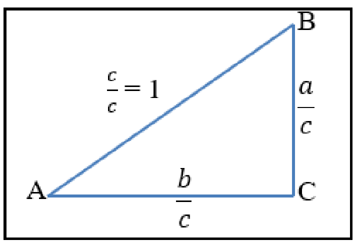


Figura 5 – División de la longitud de todos los lados del triángulo rectángulo por la longitud de la hipotenusa.

De este modo se pueden calcular el seno y el coseno de los ángulos agudos en cualquier triángulo rectángulo, donde se conocen las longitudes de sus lados, seno es igual a la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, y el coseno es igual a la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa. Además, se podrán determinar otras razones que se estudiarán más adelante, como la tangente que es igual a la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente, y la cotangente que es el recíproco de la anterior.

En este momento se procede a comentar la identidad fundamental pitagórica, para ello destacar que cuando un ángulo varía su amplitud, el seno y el coseno también lo hacen, pero ellos son respectivamente, la longitud del cateto opuesto y del adyacente a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo con hipotenusa uno (1), por tanto, para todo ángulo x, como una consecuencia del teorema de Pitágoras, se cumple que $sen^2x + cos^2x = 1$, esta no es una demostración rigurosa, la misma se debe hacer en el momento preciso, pero ayuda a sentar las bases para dicha demostración, y brinda a los estudiantes una imagen mental que le permitirá recordar esta relación, además de fomentar la utilización de la interpretación geométrica y la geometría elemental, como

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

una estrategia cognitiva eficiente para la construcción de los conocimientos trigonométricos.

Para introducir el círculo trigonométrico (figura 6) se crea un medio de enseñanza que consiste en un ángulo con uno de sus lados fijos, sobre el semieje positivo de las accisas y el vértice en el origen del sistema de coordenadas rectangulares (sería muy bueno la utilización de la computadora y simular este proceso), pues se involucran más órganos de los sentidos en la construcción del conocimiento y tendrá un mayor acercamiento a la realidad. Sobre el otro lado móvil del ángulo se sitúa un punto A, a una distancia uno (1) del vértice, se destaca que a medidas que el ángulo cubre los 360º el punto A describe una circunferencia, cada punto sobre la circunferencia tiene sus coordenadas, la ordenada es el seno y la accisa es el coseno del ángulo. De este modo se definen funciones trigonométricas, para cualquier ángulo independientemente del cuadrante donde se encuentre su lado terminal.

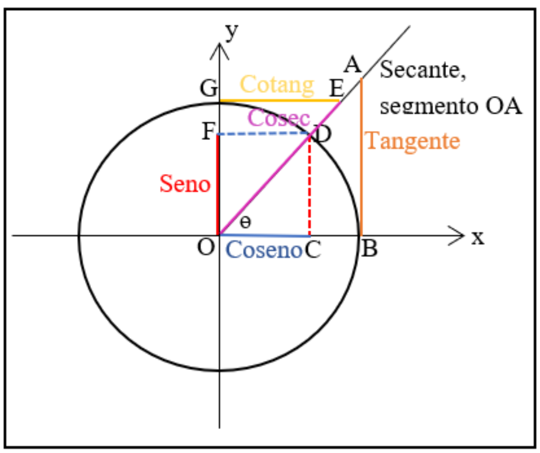


Figura 6 – Círculo trigonométrico

A partir de la figura 6 se procede a identificar geométricamente la tangente (segmento AB), se denomina así porque es tangente a la circunferencia en el punto B y es paralelo al segmento que representa el seno; la cotangente (segmento EG), también es tangente a la circunferencia, pero en el punto G y es paralelo al segmento que representa el coseno; o sea, la cofunción del seno. La secante es el segmento OA y la cosecante es el segmento OE.

Es importante destacar los elementos en esta figura, porque proporcionan al estudiante una fuente de acercamiento a la realidad de las diferentes razones trigonométricas, como formas de medir ángulos, y sirve como referencia visual para procesar la información y punto de partida para el anclaje de casi toda la trigonometría y lograr una estructura cognitiva fuerte y sistémica.

Generalmente se dan como definición las otras razones trigonométricas, el estudiante

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

tendrá que recordarlas arbitrariamente, no se explotan los conocimientos precedentes para deducir éstas y así construir una estructura cognitiva basada en el razonamiento lógico y contribuir al desarrollo de estrategias cognitivas. Una forma diferente a la anterior, puede ser solicitar a los estudiantes que, basados en la figura 6, determinen fórmulas para calcular las longitudes de los segmentos que representan la tangente, la cotangente, la secante y la cosecante, y luego introducir las definiciones.

De este modo, las razones trigonométricas que generalmente se introducen como definiciones y, que los estudiantes las asimilan completamente descontextualizadas y no son capaces de dar una interpretación empírica de las mismas, se conocen mediante la resolución de problemas que conducen a dichas definiciones, por lo que esta experiencia las convierte en conocimientos significativos, que contribuirán a enriquecer armónicamente la estructura cognitiva.

Los signos de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes y los valores de éstas para los ángulos notables, debido a los métodos de enseñanza ineficientes, los estudiantes deben memorizarlos sin ninguna estrategia que les ayude.

Para los signos, un recurso con carácter científico, se basa en la representación del círculo trigonométrico en un sistema de coordenadas rectangulares (Figura 7). Un punto A situado sobre el lado terminal del ángulo y la circunferencia trigonométrica, la accisa del punto A es el coseno del ángulo y la ordenada es el seno, en el primer cuadrante ambas son positivas, por ello el seno y el coseno de un ángulo del primer cuadrante son positivos, y como las otras funciones se obtienen mediante razones donde están involucrados el seno y el coseno, todas son positivas. Este procedimiento sirve para todos los cuadrantes, por ejemplo, cualquier punto situado en el segundo cuadrante, la accisa es negativa (coseno negativo) y la ordenada positiva (seno positivo) (Figura 7).

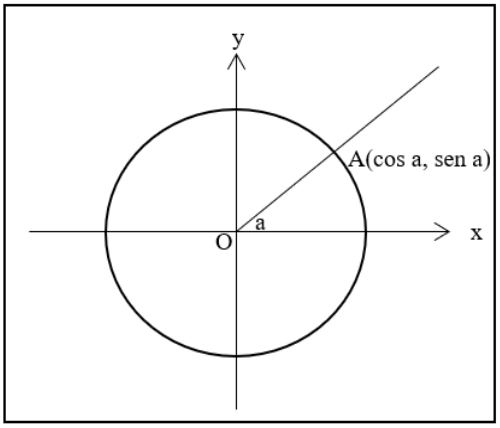


Figura 7 – El valor del seno y coseno de un ángulo coinciden con las coordenadas rectangulares del punto A.

Luego con el uso de esta imagen, fácil de recordar, basada en el conocimiento científico que los estudiantes ya poseen, se puede recuperar el signo de las funciones

ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

trigonométricas en los diferentes cuadrantes.

Los valores de los ángulos notables se deducen a través de dos estrategias, por lo que no es necesario aprender de memoria. La primera es para cuando los ángulos son múltiplos del ángulo recto, o sea: 0º, 90º, 180º, 270º y 360º. En estos casos el punto A se encuentra siempre sobre alguno de los ejes coordenados, y el valor de las coordenadas de dicho punto corresponden al coseno y al seno del ángulo. Los valores de las otras razones trigonométricas se determinan con el uso de las definiciones correspondientes (Figura 8).

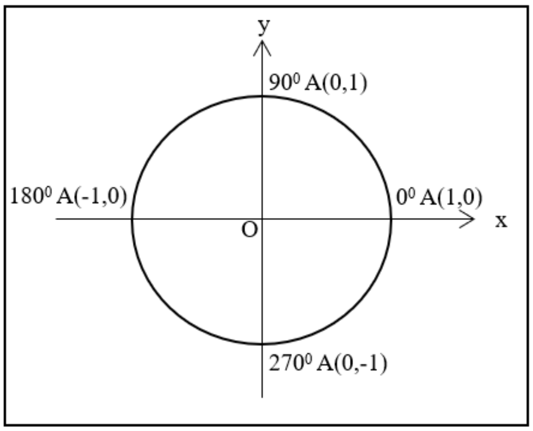
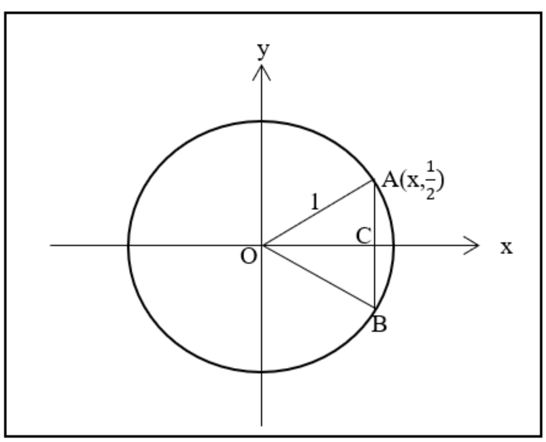


Figura 8 – Círculo trigonométrico para determinar valores trigonométricos cuando los lados terminales de los ángulos coinciden con los ejes coordenados.

Luego se procede a determinar el seno de un ángulo cuya amplitud es de 30º, para ello se construye un triángulo equilátero, cuyos lados tienen longitud uno (1), uno de sus vértices coincidente con el origen de coordenadas, y los otros dos determinan una cuerda en la circunferencia trigonométrica, cuya mediatriz es el semieje positivo de las accisas (triángulo OAB) (Figura 9).



Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Figura 9 – Triángulo equilátero, cuyos lados miden uno (1), eje “x” mediatriz del segmento AB.

Con el uso de conocimientos elementales de la geometría, resulta fácil demostrar que el ángulo AOC mide 30º, que el triángulo ACO es rectángulo y que la ordenada del punto A es igual a $\frac{1}{2}$ que es el seno de 30º, un valor trigonométrico que generalmente se da y no se demuestra, y los estudiantes lo aceptan sin ningún tipo de comprobación. Luego se toma como punto de partida para la construcción de la tabla trigonométrica de ángulos notables, la cual se construye a través del razonamiento lógico y debidamente fundamentada mediante conocimientos precedentes.

La segunda estrategia consiste en memorizar que el sen 30º = $\frac{1}{2}$, entonces se concluye que todo triángulo rectángulo que tenga un ángulo de 30º, cumple que el cateto opuesto a dicho ángulo es la mitad de la hipotenusa, se procede a construir el más simple de estos triángulos, donde el cateto opuesto es uno (1) y la hipotenusa es dos (2), luego el cateto adyacente es, $\sqrt{2^2 - 1^2}$ = $\sqrt{3}$ (Figura 10).

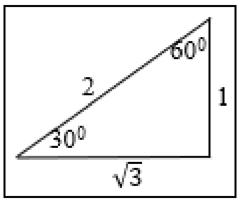


Figura 10 – Triángulo rectángulo para determinar valores trigonométricos en ángulos notables.

En este triángulo los ángulos agudos miden 30º y 60º, por lo que a través de las razones trigonométricas, en el triángulo rectángulo se deduce la tabla para estos dos ángulos sin necesidad de memorizarla textualmente.

Para el ángulo de 45º se procede a construir un triángulo rectángulo e isósceles, cuyos catetos son iguales a uno (1), la hipotenusa es igual a $\sqrt{1^2 + 1^2}$ = $\sqrt{2}$ (Figura 11).

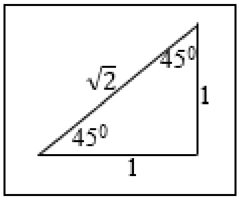


Figura 11 – Triángulo rectángulo para determinar los valores de las razones del ángulo de 45 grados.

Con el mismo procedimiento anterior, ahora basado en este triángulo, se construye la tabla trigonométrica para el ángulo de 45º.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Varias identidades trigonométricas pueden ser introducidas a través de la geometría plana, serán mejor asimiladas y provocarán una acomodación eficiente de la estructura cognitiva. A continuación, se propone cómo tratar algunas.

- Sec^2x = 1 + Tan^2x

Con el apoyo de la figura 12, para el ángulo AOC, el segmento BD es tangente, el segmento OD secante, debido a que el triángulo OBD es rectángulo, como consecuencia del teorema de Pitágoras, se cumple que Sec^2x = 1 + Tan^2x.

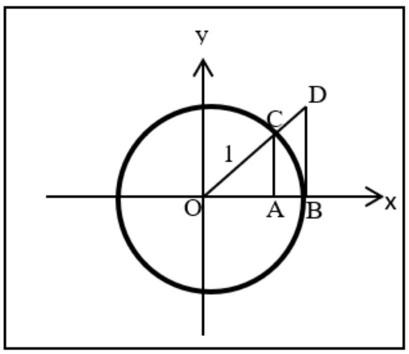


Figura 12 – Círculo trigonométrico para demostrar identidad.

- csc^2x = 1 + cot^2x

Para el ángulo BOD en la figura 13, el segmento CD es la cotangente, el segmento OC es radio de la circunferencia trigonométrica, y el segmento OD es la cosecante. El triángulo CDO es rectángulo en C, donde la hipotenusa es la cosecante, y sus catetos son el radio de circunferencia trigonométrica y la cotangente, se aplica el teorema de Pitágoras y se concluye que, csc^2x = 1 + cot^2x.

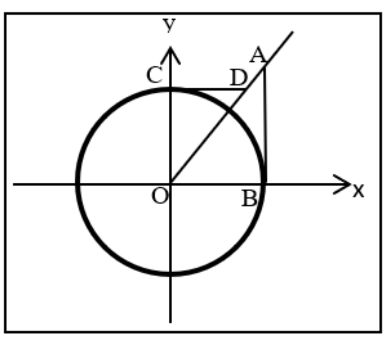


Figura 13 – Círculo trigonométrico para demostrar identidad.

- Sen(90º-x) = cos(x), cos(90º-x) = sen(x)

Para introducir esta identidad se construye un triángulo rectángulo (Figura 14). Es fácil demostrar que, en todo triángulo rectángulo, si un ángulo agudo tiene amplitud x, el otro tendrá amplitud 90º-x.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

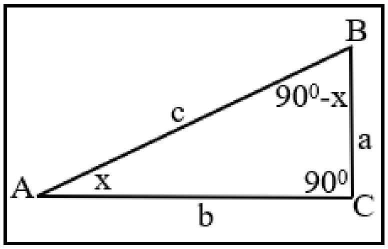


Figura 14 – Razones trigonométrica ángulos complementarios

Así, sen(x) = $\frac{a}{c}$ = cos(90º$-x$), cos(x) = $\frac{b}{c}$ = sen(90º$-x$). Las demás razones trigonométricas se determinan a través las respectivas definiciones. Esta demostración también puede hacerse en la circunferencia trigonométrica, es bien productivo comparar ambas vías.

- Cos(-x) = Cos(x), Sen(-x) = -Sen(x)

La figura 15 sirve como medio de enseñanza para discutir esta identidad. En el inciso a) se considera a los segmentos OA y OC inicialmente sobre el semieje positivo de las accisas, A y C coincidentes, el segmento OA rota en sentido positivo para obtener el ángulo de amplitud x, y el segmento OC rota en sentido negativo hasta obtener el ángulo de amplitud –x, luego de demostrar que el triángulo ABO es congruente al triangulo CBO, se concluye que poseen el mismo coseno, y que el seno de ambos tienen el mismo valor absoluto, pero signos contrarios. En el inciso b) de la misma figura 15, se muestra que la identidad también se cumple en el caso que los lados terminales de los ángulos se encuentran en el segundo y tercer cuadrante.

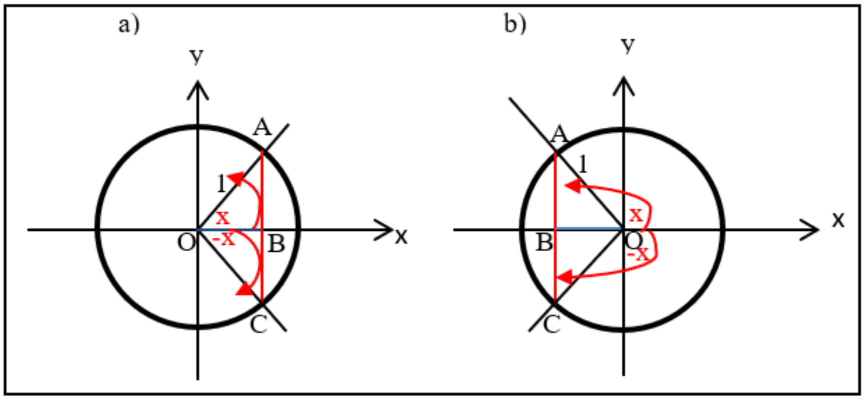


Figura 15 – Paridad de funciones trigonométricas

- Sen(180º-x) = Sen(x), Cos(180º-x) = - Cos(x).

En la figura 16 se demuestra que los triángulos ABO y CDO son congruentes, por tanto, las accisas de los puntos B y C tienen el mismo valor absoluto; pero la de B es negativa y la de C es positiva, y sus ordenadas son iguales, con esto se ve claramente que se

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

cumple la identidad.

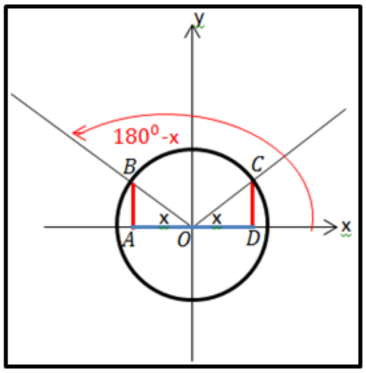


Figura 16 – Medio de enseñanza para mostrar la identidad: Sen(180º-x) = Sen(x), Cos(180º-x) = - Cos(x).

- Cos(180º+x) = - Cos(x), Sen(180º+x) = -Sen(x)

En la figura 17 se demuestra la igualdad entre los triángulos AOB y DOC para probar que los puntos B y C tienen coordenadas opuestas; las del punto B son negativas y las del punto C son positivas; o sea: C[cos(x), sen(x)] y B[-cos(x), -sen(x)]. Después se indica para las otras funciones a través de sus definiciones.

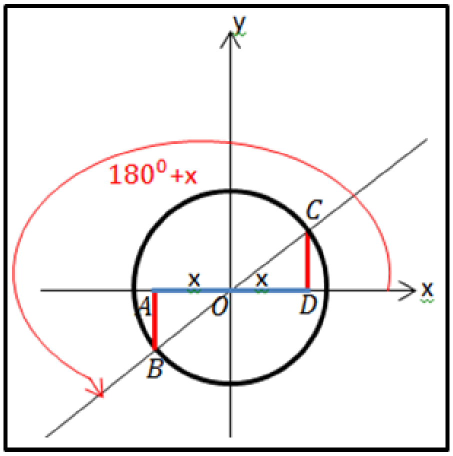


Figura 17 – Medio de enseñanza para mostrar la identidad: Cos(180º+x) = - Cos(x), Sen(180º+x) = -Sen(x).

- Sen(90º+x) = Cos(x), Cos(90º+x) = -Sen(x)

En la figura 18 se demuestra la igualdad entre los triángulos ABO y CDO para probar, a través de las coordenadas de los puntos B y C, que se cumple la identidad.

Arisdorgan Diéguez Almaguer
Mario Adelfo Batista Zaldívar
Hitler Farley Figueroa Saavedra
Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

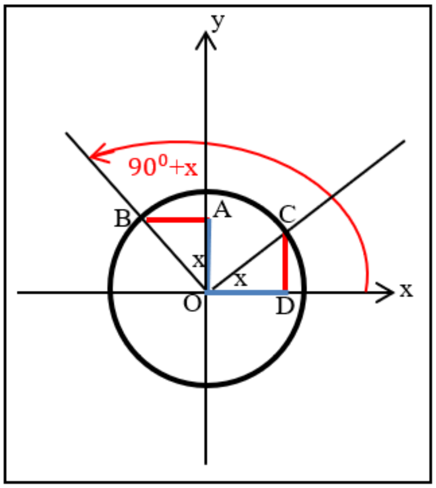
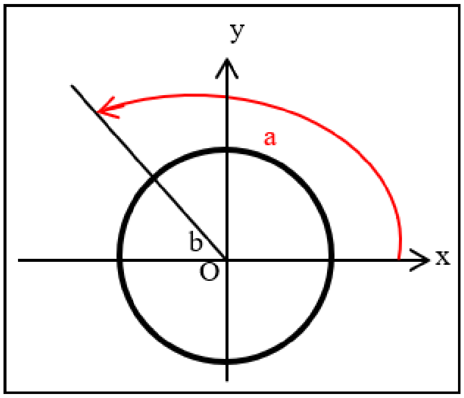


Figura 18 – Medio de enseñanza para mostrar la identidad: Sen(90º+x) = Cos(x), Cos(90º+x) = -Sen(x).

Otro contenido que se enseña de manera reproductiva y que los estudiantes solo memorizan, sin interiorizar ni encontrarle significado alguno, son las fórmulas de reducción de ángulos al primer cuadrante, aunque el profesor demuestre o deduzca estas fórmulas, el estudiante ve este proceso una sola vez y luego debe memorizar varias fórmulas. El método que se propone en este artículo, requiere de menor esfuerzo y está basado en el proceso de deducción de las fórmulas.

Consiste en representar en un sistema de coordenadas rectangulares (Figura 19) el ángulo al cual se quiere reducir al primer cuadrante (ángulo a), luego se determina el ángulo comprendido entre el lado terminal del ángulo a, y el semieje de las accisas que sirve de frontera al cuadrante donde se encuentra el lado terminal (cuarto cuadrante semieje positivo, segundo y tercero semieje negativo). Este segundo ángulo se denota con la letra b; el ángulo b tiene razones trigonométricas iguales en valor absoluto al ángulo que se quiere reducir, solo resta tomar en consideración los signos de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes.



Arisdorgan Diéguez Almaguer
Mario Adelfo Batista Zaldívar
Hitler Farley Figueroa Saavedra
Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Figura 19 – Medio de enseñanza para fórmulas de reducción de ángulos.

El uso de la figura 19 para resolver varios ejercicios brinda a los estudiantes una manera intuitiva de utilizar las fórmulas de reducción y una representación gráfica de las mismas.

Luego un esquema puede resumir y mostrar los principales conocimientos y sus relaciones para ayudar a captar sus significados. Se orienta a los estudiantes realizar su propio mapa conceptual, se estimula el intercambio y la discusión para, a través de aproximaciones sucesivas y el trabajo colectivo, obtener un producto final y, de este modo, se prepara a los estudiantes para utilizar este recurso en tareas futuras (Figura 20).

Esta metodología no solo ayuda a los estudiantes a recordar y aprender de manera más eficiente, sino también les da un método de trabajo para penetrar en la esencia de los fenómenos, para comprobar la veracidad de los contenidos, yendo de lo general a lo particular y viceversa, les enseña cómo al estudiar casos particulares se pueden generalizar conocimientos, que saber no es simplemente memorizar y repetir definiciones, conceptos, leyes y relaciones, es también, y lo más importante, entender la causas y los efectos del objeto de conocimiento, por lo tanto, sienta las bases para el desarrollo de estrategias cognitivas basadas en el razonamiento lógico y opuestas a los dogmas, toma en consideración que el estudiante es quien aprende, de aquí su papel activo, y que hay tantas formas de aprender como individuos.

Arisdorgan Diéguez Almaguer
Mario Adelfo Batista Zaldívar
Hitler Farley Figueroa Saavedra
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

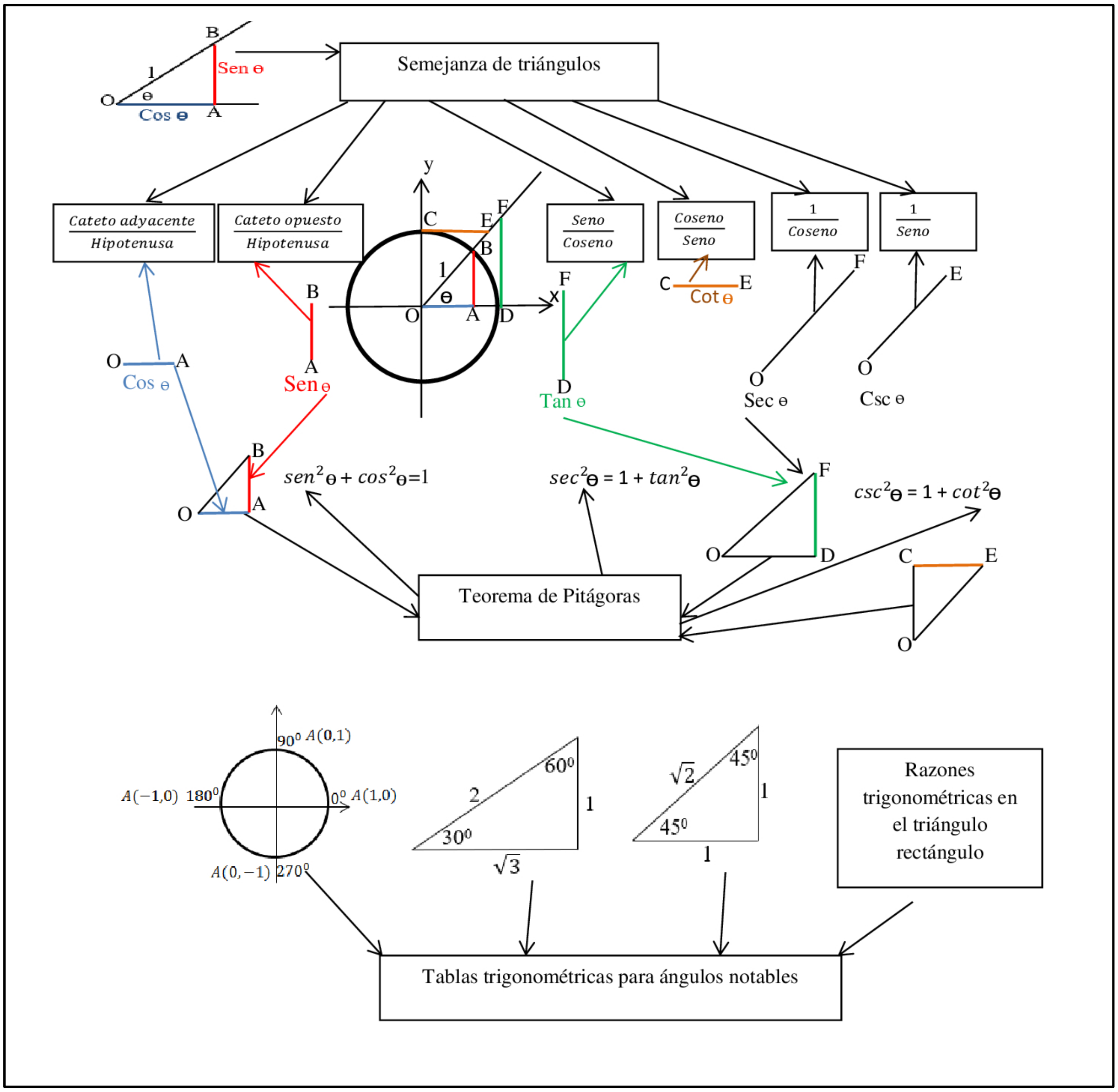


Figura 20 – Mapa conceptual de los principales conocimientos trigonométricos y sus relaciones.

Por ello el profesor debe tener una mentalidad flexible para ofrecer y valorar alternativas para pensar y aprender mejor, al estar centrada en el estudiante, desarrolla destrezas y no la simple repetición memorística de la información, persigue el desarrollo armónico de la personalidad y no solo de su dimensión intelectual, porque favorece la autoestima del estudiante al darle protagonismo, considerar y evaluar sus proposiciones, además de contribuir a logro del éxito estudiantil.

Conclusiones

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

La enseñanza de la Matemática a partir de un conocimiento significativo mediante la metacognición, cimentada en el constructivismo, es de vital importancia para desarrollar habilidades y valores perdurables, válidos y útiles, y dotar a los estudiantes con herramientas que les posibilite el autoaprendizaje y autosuperación constante; sin embargo, para la enseñanza de la trigonometría no se encontraron propuestas metodológicas que integren sistémicamente estas teorías pedagógicas, que aseguren que el estudiante aprenda a aprender.

La propuesta metodológica que se presenta se sustenta en la integración sistémica de las teorías del conocimiento significativo, la metacognición y el constructivismo, que logra no solo hacer las clases de Matemática más atractivas y dinámicas, sino también contextualizarlas, para lograr que los estudiantes sean capaces de transformar adecuadamente su entorno, que no acepten dogmas, que cuestionen y no eternicen el uso de procederes incorrectos o inadecuados.

El tratamiento que se da en el presente trabajo al proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos trigonométricos, mediante la propuesta metodológica que se presenta, es plenamente aplicable en todos los niveles de educación donde se enseñan, debido a que parte desde condiciones previas elementales y, lo más importante, sienta las bases y muestra el camino, para que otros contenidos o conocimientos sean construidos mediante procedimientos similares.

Referencias

Argüelles, D. y Nagles, N. (2007). *Estrategias para promover procesos de aprendizaje autónomo.* Colombia: Alfaomega.

Ausubel, D.P. y Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas p. 10 - 50.

Carretero, M. (2001). *Metacognición y educación.* Buenos Aires: Aique.

Delval, J. (1996*). El desarrollo humano*. Madrid: Siglo XXI. p. 100 - 120.

Flavell, J.H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving**.** Resnick, L. B. (Ed.) *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. p. 230 - 233.

Glaser, R. (1994). *Learning theory and instruction***.** En: G. D'Ydewalle, P. Eelen y B.Hispanoamericana, S. A., Naucalpan de Juárez, Edo. De México.

Montalvo, R. *Historia de la trigonometría y su enseñanza*. 2012.120 f. (Tesis de grado Licenciatura en Matemática). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México, 2012.

Osses, S. y Jaramillo, S. *Metacognición un camino para aprender a aprender*. Estudios Pedagógicos XXXIV, Nº 1: 187-197, 2008, Chile. p. 2 - 10.

Piaget, J. (1970*). Educación e instrucción*. Buenos Aires. Proteo. p. 35 - 40.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 11 Número especial 2
Recepción: 20/02/19. Aprobado: 15/10/19

Piaget, J. (1983). *Teorías del Lenguaje - Teorías del Aprendizaje*. *El debate Piaget-Chomsky*. Barcelona: Crítica.

Roa, H. (2016). Estrategias creativas y metacognitivas en el aprendizaje musical. *Civilizar*, 16(30), p. 1 - 7.