REGLA DE GAMBOA PARA LA DIVISIÓN ENTERA DE POLINOMIOS Y TRIÁNGULOS DE MICHEL PARA LA GEOMETRÍA FRACTAL

GAMBOA'S RULE TO THE WHOLE DIVISION OF POLYNOMIALS AND MICHEL´S TRIANGLES FOR FRACTAL GEOMETRY

Michel Enrique Gamboa Graus[1] (michelenrique@ucp.lt.rimed.cu)

RESUMEN

En este artículo se presentan algunos resultados de la creatividad que ha habido necesidad de implementar en el ejercicio de la profesión. Se muestra la novedosa regla de Gamboa, concebida para realizar la división entera de polinomios. Esta puede servir de complemento para otras anteriores y es de especial interés, por cuanto es más simple que el algoritmo general de división de polinomios y está basada en el método de los coeficientes indeterminados, considerando el polinomio divisor como un binomio, para luego apoyarse en la regla de Ruffini. Con ella se gana en generalidad con respecto a las reglas de Ruffini y Horner, en tanto se puede utilizar para dividir un polinomio por cualquier otro de grado menor o igual. Con respecto al método de los coeficientes indeterminados es más sencilla y menos trabajosa, además se reducen los riesgos de posibles errores de cálculo. También se presentan los triángulos de Michel, elaborados para ayudar a los estudiantes a comprender aspectos de la Geometría fractal a través de diferentes ejemplos.

PALABRAS CLAVE: Polinomios, división, álgebra, geometría fractal.

ABSTRACT

This article presents some results about creativity, which I had the opportunity to implement during my professional work such as Gamboa's rule. It is a new rule created to develop the whole division of polynomials which can be used as a complement to the previous ones and it is of special interest because it is more simple than the general algorithm for the division of polynomials, and it is based on the method of the undetermined coefficients, considering the divisor polynomial as a binomial to lean in the rule of Ruffini. With this rule there is a gain in generality with respect to Ruffini's and Homer's rules, because it can be used to divide a polynomial by any polynomial of smaller or equal degree. With respect to the method of the undetermined coefficients is very simple and easy to work; besides the risks of possible calculation errors are reduced. Michel´s triangles were made to help the students understand some aspects of fractal Geometry through different examples.

KEY WORDS: Polynomials, division, algebra, fractal geometry.

La diversidad de representaciones utilizadas en la didáctica de las matemáticas para cada sistema conceptual, junto con algunos de los modelos usuales de los correspondientes conceptos permite el estudio de diversas facetas y propiedades de uno mismo de ellos. Esto posibilita la investigación e incrementa la preparación en el contenido específico objeto de estudio. Al respecto, la experiencia personal del autor en la búsqueda de esta diversidad para enseñar los temas que imparte lo han sumergido en exploraciones que han resultado en

[1]Doctor en Ciencias Pedagógicas y profesor auxiliar. Universidad de Ciencias Pedagógicas "Pepito Tey", Las Tunas, Cuba.

aportes como la regla de Gamboa para la división entera de polinomios, los triángulos de Michel y la caja de triángulos para el estudio de la geometría fractal.

El desarrollo histórico de las matemáticas ofrece una visión de ellas como algo "vivo", no acabado, en continuo progreso. Una buena parte de los matemáticos de todos los tiempos se ha propuesto hacer su contribución o poner su sello de identidad en alguna parte de este mundo fascinante, con el afán de que sean mejor comprendidas, sencillas y gustadas. En este sentido puede hacerse referencia a: Zaldívar y Rodríguez (2010); Reyes, Silva y Fernández (2009); Gamboa y otros (2009), entre otros que aportan desde diversas perspectivas y niveles de enseñanza.

En este artículo se presentan algunos resultados de la creatividad que ha habido necesidad de implementar en el ejercicio de la profesión. De este modo, se introducen algunos ejemplos elaborados para ayudar a los estudiantes a comprender aspectos de la Geometría fractal, que contribuyen al enfrentamiento a este contenido en nuestras instituciones educativas, y una novedosa regla para realizar la división entera de polinomios, que puede servir de complemento para reglas anteriores.

División entera de polinomios

Los polinomios aparecen en los lugares más inesperados. Una multitud equivale a un polinomio compuesto por varios monomios (los individuos agrupados conforme a distintos criterios). Una molécula de ADN humano puede medir hasta un metro y, sin embargo, debe estar comprimida en una célula cuyo tamaño es de unas cinco millonésimas de metro; a pesar de esto, cuando debe autoduplicarse, lo hace perfectamente sin ningún problema aparente. Para estudiar el modo en que el ADN se entrecruza y forma esos nudos tan particulares que le permiten mantener la estructura, se utilizan diversos métodos matemáticos, entre los que se incluyen los llamados polinomios de Jones.

Las operaciones con polinomios se encuentran dentro de una rama que se desarrolla en una amplia y rica sección del Álgebra. Estas han sido consideradas por los estudiantes, tradicionalmente, como uno de los tópicos poco aplicables a otros campos diferentes del conocimiento, poco útil para ellos y demasiado abstracto. Es por estas razones que se les hace muy difícil, en ocasiones, apropiarse de ese conocimiento, a pesar de que se les plantea cuáles fueron las ideas y problemas que le dieron origen y significado.

La regla de Gamboa contribuye a un mejor aprendizaje de la división de polinomios. Esta es más simple que el algoritmo general y está basada en el método de los coeficientes indeterminados. En ella se considera el polinomio divisor como un binomio de la forma $x-c$, para luego apoyarse en la regla de Ruffini, con la particularidad de que $(-c)$ puede tener más de un coeficiente. Con ella se gana en generalidad con respecto a las reglas de Ruffini y Horner, por cuanto no solo se puede dividir un polinomio por un binomio o por un polinomio que se pueda descomponer en factores, sino que se puede utilizar para dividir por cualquier polinomio de grado menor o igual. Con respecto al método de los coeficientes indeterminados es más sencilla y menos trabajosa, además se reducen los riesgos de posibles errores de cálculo.

Para los que han enfrentado la división de polinomios es conocido que hallar el cociente del polinomio A por el polinomio B ($B\neq0$), de grados m y n ($m \geq n$) es determinar un polinomio Q y otro R, tales que $A=B\cdot Q+R$, con la condición de que el grado de R sea inferior al de B. Los polinomios A, B, Q y R se llaman respectivamente, dividendo, divisor, cociente y resto de la división entera.

El método que se acostumbra a utilizar para obtener Q y R cuando se dan los polinomios A y B se basa en la siguiente regla práctica de la división entera: una vez ordenados el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable se obtiene el primer término del cociente, dividiendo el primero del dividendo por el primero del divisor; el primer resto parcial resulta restando del dividendo el producto del divisor por el primer término del cociente; dividiendo ahora el primer término de este resto parcial por el primero del divisor se calcula el segundo del cociente, y así sucesivamente, hasta llegar a un resto parcial cuyo grado sea inferior al del divisor o cero. Este último resto parcial es el resto de la división (división euclidiana).

Ejemplo:

dividendo	$x^4+3x^3+4x^2+8x+5$	x^2+2x+3	divisor
	$x^4+2x^3+3x^2$	x^2+x-1	cociente
1er resto parcial	x^3+x^2+8x+5		
	x^3+2x^2+3x		
2do resto parcial	$-x^2+5x+5$		
	$-x^2-2x-3$		
resto de la división	$7x+8$		

Es conocido que aplicando el método de los coeficientes indeterminados se puede hallar el cociente y el resto de la división de un polinomio entero en x,

$$P(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$$

por un binomio de la forma x-c.

Designemos por b_0, b_1, b_2,...,b_{n-2}, b_{n-1} los coeficientes del cociente, que se sabe es un polinomio entero en x de grado n-1, y por R el resto, que es independiente de x (por ser el divisor de primer grado).

Deberá verificarse

$$(x-c)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1})+R= a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$$

O sea

$$b_0x^n+(b_1 - b_0 c)x^{n-1}+(b_2 - b_1 c)x^{n-2}+...+(b_{n-1} - b_{n-2} c)x - b_{n-1}c+R= a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$$

Identificando los dos miembros de la ecuación se tiene que:

$$\begin{aligned} b_0&=a_0\\ b_1-b_0c&=a_1\\ b_2-b_1c&=a_2\\ &.\\ &.\\ &.\\ b_{n-1}-b_{n-2}c&=a_{n-1}\\ -b_{n-1}c+R&=a_n \end{aligned}$$

De donde se deduce:

$$
\begin{aligned}
&b_0 = a_0\\
&b_1 = b_0c + a_1 = a_0c + a_1\\
&b_2 = b_1c + a_2 = a_0c^2 + a_1c + a_2\\
&\qquad\vdots\\
&b_{n-1} = b_{n-2}c + a_{n-1} = a_0c^{n-1} + a_1c^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\\
&R = b_{n-1}c + a_n = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n \longrightarrow
\end{aligned}
$$

Obsérvese que el resto es el valor que toma P(x) para x = c, o sea, es P(c)

Por tanto:

El primer coeficiente del cociente es igual al primero del dividendo; un coeficiente cualquiera del cociente b_i es igual al producto de c por el anterior b_{i-1} más el a_i del dividendo que ocupa el mismo lugar; en fin, el resto de la división es igual al producto de c por el último coeficiente del cociente más el último del dividendo (Regla de Ruffini).

En la práctica, la operación se designa de la forma que muestra el siguiente ejemplo:/

Dividir $x^4+3x^3+4x^2+8x+5$ por $x+2$

Coeficientes del dividendo		1	3	4	8	5
Productos de (-c) por los coeficientes del cociente	-2		-2	-2	-4	-8
Coeficientes del cociente y del resto		1	1	2	4	-3 → R

El primer coeficiente del cociente es 1; los demás se obtienen, conforme a la regla, multiplicando el anterior por –2 y sumando el producto con el coeficiente correspondiente del dividendo; el resto se halla multiplicando el último coeficiente del cociente, que es 4, por –2 y sumando con el último coeficiente del dividendo, que es 5. El cociente buscado es, entonces, x^3+x^2+2x+4 y el resto es –3.

El método de coeficientes indeterminados puede aplicarse también para calcular el cociente y el resto de cualquier división de polinomios. Sea, por ejemplo, hallar el cociente y el resto de la división de $3x^3+x^2-2x+6$ por x^2-2x+3. En este caso, el cociente será un binomio de primer grado de la forma Ax+B, puesto que el dividendo es de tercer grado y el divisor de segundo; y el resto, cuyo grado es siempre menor que el grado del divisor, será también de la forma Cx+D.

Por la definición de división se tiene que:

$$
\begin{aligned}
3x^3+x^2-2x+6 &= (x^2-2x+3)(Ax+B)+(Cx+D)\\
&= Ax^3 \begin{array}{r|r|l} -2A & x^2+3A & x + 3B\\ + B & -2B & + D \end{array}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A&=3\\
-2A+B&=1\\
3A-2B+C&=-2\\
3B+D&=6
\end{aligned}
$$

Donde, para facilitar el trabajo se escriben en columna los coeficientes de una misma potencia de x. Igualando los coeficientes de las mismas potencias de x resulta que:

de donde se obtiene A=3 B=7 C=3 D= -15

por tanto el cociente es 3x+7 y el resto 3x-15

Regla de Gamboa para la división entera de polinomios

A continuación se realiza una explicación pormenorizada y con ejemplos del proceso para utilizar esta regla, que es preciso entender perfectamente para garantizar el éxito en este tipo de división.

(I) Una vez ordenados el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable x el divisor se separa en (x-c) donde **(x)** es el término en el que la variable tiene mayor exponente y **(-c)** lo forman los restantes términos.

Ej 1 a) $x^2 \quad +2x$ b) $x^2 \ \underbrace{+2x +3}$ c) $x^3 \ \underbrace{-3x^2+2x-4}$ d) $2x^5 \ \underbrace{+2x^4+5x^3}$

$\downarrow \quad \downarrow$

[**(x)** **(-c)**] [(x) (-c)] [(x) (-c)] [(x) (-c)]

(II) Al colocarlos en la tabla para efectuar la división se ponen encima los coeficientes del dividendo, a la izquierda cada coeficiente de **(-c)** con signo opuesto y sobre estos el coeficiente de **(x)**, que coincide con el coeficiente mayor del divisor (si es la unidad no es necesario). Se entiende por coeficiente mayor de un polinomio de una sola variable el coeficiente del término en el que la variable tiene mayor exponente; si el divisor está ordenado en potencias descendentes de la variable, entonces es el primero de ellos.

Ej 2

$$\text{a)}\ \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ (-2) & & & & \\ \hline \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ (-2)(-3) & & & & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{c)}\ \begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ (3)(-2)(4) & & & & \\ \hline \end{array} \qquad \text{d)}\ \begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ (-2)(-5) & & & & \\ \hline \end{array}$$

(III) A la hora de dividir, el primer coeficiente del cociente, que es el primer valor que baja en la tabla, es la división entre el coeficiente mayor del dividendo y el coeficiente mayor del divisor, por el que se multiplica cada valor de los colocados a la izquierda de la tabla, colocando el primer resultado debajo del otro valor que le sigue a la derecha, el segundo debajo del segundo que le sigue a la derecha, el tercero debajo del tercero que le sigue a la derecha y así sucesivamente hasta llegar al último coeficiente de **(-c)**. Luego se realiza la suma algebraica correspondiente y se expresa debajo, el primer valor que baja se divide por el coeficiente mayor del divisor que está representado sobre los coeficientes de **(-c)** y va formando parte de la solución e indica que es el siguiente por multiplicar realizando el mismo procedimiento; si el grado del dividendo es m y el del divisor es n, entonces esa división por el coeficiente mayor solo se realiza para los (m-n+1) primeros valores, que van formando parte de la solución y son los coeficientes del cociente. Se recomienda pasar una línea vertical para evitar confusiones y si el coeficiente mayor es la unidad no es necesaria esa división. Para los siguientes valores, que son los coeficientes del resto, no se realiza esa división ni se multiplica por los coeficientes de **(-c)**, solo se efectúan las sumas algebraicas que hayan quedado planteadas. Así termina el procedimiento.

Ej 3 a) Dividir $3x^4+2x^3-x^2+2x-6$ por x^3+3x^2+2x-4

Se separa el divisor **(x)**$=x^3$ y **(-c)**$=3x^2+2x-4$. Se colocan encima de los coeficientes del dividendo 3, 2, -1, 2, -6, a la izquierda cada coeficiente de **(-c)** con signo opuesto –3, -2,4 y sobre estos el coeficiente mayor del divisor (en este caso es la unidad y no es necesario colocarlo). El grado del dividendo es m=4 y el del divisor n=3.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & 2 & -1 & 2 & -6 \\
(-3)(-2)(4) & & -9 & -6 & 12 & -28 \\
\hline
 & 3 & -7 & -7 & 14 & -34 \\
 & & & \underline{21} & \underline{14} & \\
 & & & 14 & 28 &
\end{array}
$$

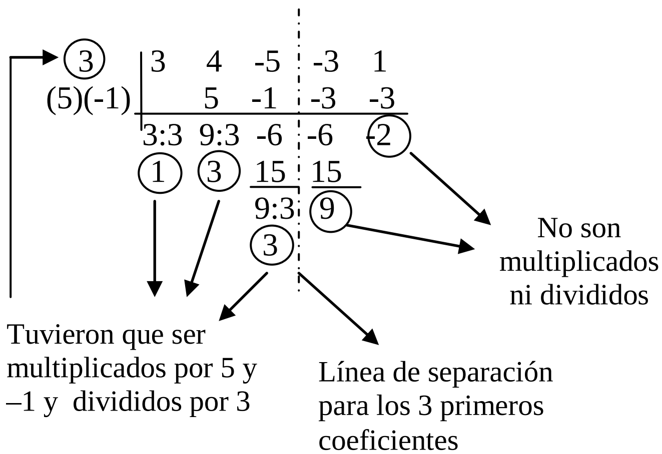
En este caso, el primer valor que baja en la tabla es el coeficiente mayor del dividendo, 3, porque no es necesario efectuar las divisiones por el coeficiente mayor del divisor, se multiplica cada valor de los colocados a la izquierda de la tabla por ese 3 bajado, que ya forma parte de la solución; el primer resultado –3•3=-9 se coloca debajo del otro valor que le sigue a la derecha, 2; el segundo –2•3=-6 debajo del segundo que le sigue a la derecha, -1; y el tercero 4•3=12 debajo del tercero que le sigue a la derecha, 2. Luego se realiza la suma algebraica correspondiente 2-9=-7, -1-6=-7 y 2+12=14, como 2-9=-7 fue el primero en bajar en la tabla, entonces forma parte de la solución y es recomendable hacerle una marca, que puede ser encerrarlo en un círculo, para reconocer que es el próximo por multiplicar. Realizando el mismo procedimiento, el primer resultado –3•(-7)=21 se coloca debajo del otro valor que le sigue a la derecha, -7; el segundo –2•(-7)=14 debajo del segundo que le sigue a la derecha, 14; y el tercero 4•(-7)=-28 debajo del tercero que le sigue a la derecha, -6. Luego se realiza la suma algebraica –7+31=14, 14+14=28, -6-28=-34 y como ya se ha realizado el procedimiento m-n+1=4-3+1= 2 veces, entonces ahí se termina el procedimiento y esos valores forman parte de la solución.

b) Dividir $x^4{}_{+}3x^3+4x^2+8x+5$ por x^2+2x+3

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 3 & 4 & 8 & 5 \\
(-2)(-3) & & -2 & -3 & -3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 5 & 8 \\
 & & & -2 & 2 & \\
\cline{4-5}
 & & & -1 & 7 &
\end{array}
$$

c) Dividir $3x^4+4x^3-5x^2-3x+1$ por $3x^2-5x+1$

Se separa el divisor **(x)**=$3x^2$ y **(-c)**=-5x+1. Se colocan encima de los coeficientes del dividendo 3, 4,-5,-3,1, a la izquierda cada coeficiente de **(-c)** con signo opuesto 5 y –1 y sobre estos el coeficiente mayor del divisor, 3. El grado del dividendo es m=4 y el del divisor n=2, luego se pasa la línea divisora vertical posterior a los m-n+1=4-2+1= 3 primeros coeficientes del dividendo; los que quedan a la izquierda, después de las sumas algebraicas necesarias, serán divididos por el coeficiente mayor del divisor y multiplicados por los coeficientes de **(-c)**, mientras con los que queden a la derecha, que son los coeficientes del resto, solo se realizan las sumas algebraicas que hayan quedado planteadas.



En este caso, el primer valor que baja en la tabla es la división entre el coeficiente mayor del dividendo, 3, y el coeficiente mayor del divisor, 3, 3:3=1; se multiplica cada valor de los colocados a la izquierda de la tabla por ese 1 bajado, que ya forma parte de la solución, por eso se encierra en un círculo. El primer resultado 5•1=5 se coloca debajo del otro valor que le sigue a la derecha, 4; el segundo –1•1=-1 debajo del segundo que le sigue a la derecha, -5. Luego se realiza la suma algebraica correspondiente 4+5=9 y –5-1=-6, como 4+5=9 fue el primero en bajar en la tabla se divide por el coeficiente mayor del divisor, que está representado sobre los coeficientes de **(-c)**, 9:3=3 y va formando parte de la solución, por lo que se circula e indica que es el siguiente por multiplicar.

Realizando el mismo procedimiento, el primer resultado 5•3=15 se coloca debajo del otro valor que le sigue a la derecha, -6, y el segundo –1•3=-3 debajo del segundo que le sigue a la derecha, -3, luego se realiza la suma algebraica –6+15=9 y –3-3=-6, como –6+15=9 fue el primero en bajar se divide por el coeficiente mayor del divisor, 9:3=3 y va formando parte de la solución, por lo que se circula e indica que es el siguiente por multiplicar porque es de los que están a la izquierda de la línea de división. Análogamente el primer resultado 5•3=15, se coloca debajo del otro valor que le sigue a la derecha, -6, y el segundo –1•3=-3 debajo del segundo que le sigue a la derecha, 1, luego se realiza la suma algebraica –6+15=9 y 1-3=-2 y los valores que bajan en la tabla se circulan y forman parte de la solución sin multiplicarlos por los coeficientes de **(-c)** ni dividirlos por el coeficiente mayor del divisor, porque están a la derecha de la línea de división. Los coeficientes del cociente son 1, 3, 3 y los del resto 9 y –2.

d) Dividir $4x^5+2x^4-x^2+3x+5$ por $2x^2-3x-1$

Es necesario colocar el coeficiente mayor del divisor, 2, sobre los coeficientes de **(-c)**. El grado del dividendo es 5 y el del divisor es 2, luego se pasa la línea divisora vertical posterior a los m-n+1=5-2+1=4 primeros coeficientes del dividendo.

2	4	2	0	-1	3	5
(3)(1)		6	2	4	7	12
	4:2	8:2	2	3	10	17
	2	4	12	21	36	
			14:2	24:2	46	
			3	12		

No son multiplicados por los coeficientes de **(-c)** ni divididos por el coeficiente mayor del divisor

Tuvieron que ser multiplicados por 3 y 1 y divididos por 2

Línea de separación para los 4 primeros coeficientes

(IV) Si el menor exponente de la variable del divisor es mayor que el menor exponente de la variable del dividendo, se restan y el resultado va a indicar la cantidad de coeficientes del dividendo situados al final que van a bajar para formar parte de la solución sin efectuar ninguna suma algebraica.

Ej 4 a) Dividir $x^4+3x^3+4x^2+8x+5$ por x^2+2x

	1	3	4	8	5
(-2)		-2	-2	-4	
	1	1	2	4	$\boxed{5}$

Se baja el 5 porque el menor exponente de la variable del divisor es 1 y el del dividendo es 0, (1>0), se resta 1-0=1 y se baja el último coeficiente del dividendo

b) Dividir $x^{10}+2x^8+3x^7+x^6+2x^5+x^4+3x^3+2x^2+2x$ por $x^5+2x^4+2x^3$

	1	0	2	3	1	2	1	3	2	2
(-2)(-2)		-2	-2	4	-8	2	10	-28		
	1	-2	0	7	-7	4	11	-25	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$
			4	-8	2	10	-28			
			4	-1	-5	14	-17			

Se bajan dos porque 3 > 1 y 3 - 1= 2

c) Dividir $3x^8+4x^7-5x^6-3x^5+x^4+3x^3+x^2+2$ por $3x^6-5x^5+x^4$

3	3	4	-5	-3	1	3	1	0	2
(5)(-1)		5	-1	-3	-3				
	3:3	9:3	-6	-6	-2	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$	$\boxed{2}$
	1	3	15	15		↓	↓	↓	↓
			9:3	9					
			3						

Se bajan cuatro porque 4 > 0 y 4 - 0= 4

(V) Si el menor exponente de la variable del dividendo es mayor que el menor exponente de la variable del divisor, se restan y el resultado va a indicar la cantidad de ceros que se van a colocar en la tabla, al final, junto a los coeficientes del dividendo.

Ej 5 a) Dividir $3x^3+7x^2+x$ por x^2+x+1

El menor exponente de la variable del dividendo es 1 y el menor exponente de la variable del divisor es 0, (1>0), luego 1-0=1 indica la cantidad de ceros que se colocan en la tabla junto a los coeficientes del dividendo, al final.

	3	7	1	0	→ Se agregó un cero
(-1)(-1)		-3	-3	-4	
	3	4	-2	-4	
			-4		
			-6		

b) Dividir $6x^5+5x^4+x^3$ por $2x^3-x^2+x$

El menor exponente de la variable del dividendo es 3 y el menor exponente de la variable del divisor es 1, (3>1), luego 3-1=2 indica la cantidad de ceros que se colocan en la tabla junto a los coeficientes del dividendo, al final.

2	6	5	1	0	0	→ Se agregaron dos ceros
(1)(-1)		3	-3	-4	-1	
	6:2	8:2	-2	-4	-1	
	3	4	4	1		
			2:2	-3		
			1			

(VI) Para definitivamente dar la solución separada en cociente y resto se realiza el siguiente procedimiento:

- Comenzando de izquierda a derecha el primer exponente de la variable será la diferencia entre el exponente mayor del dividendo y el exponente mayor del divisor (m-n); el segundo será esta diferencia menos 1, (m-n-1); el tercero, la diferencia menos 2, (m-n-2) y así sucesivamente, hasta que el exponente sea igual a cero. Hasta aquí será el cociente, hasta la línea divisora vertical.

- Comenzando de derecha a izquierda el primer exponente de la variable será el menor exponente que aparezca, ya sea en el dividendo o en el divisor; el segundo, el menor más 1, y así sucesivamente hasta completar los que faltan por asignarles variables con exponentes. Ese será el resto, a la derecha de la línea divisora vertical.

Ej 6

a.) ej 3 a) cociente: $3x-7$ → procedimiento: $3x^1\ \ -7x^0 \mid 14x^2\ \ 28x^1\ \ -34x^0$
resto: $14x^2+28x-34$

b.) ej 3 b) cociente: x^2+x-1 → procedimiento: $1x^2\ \ 1x^1\ \ -1x^0 \mid 7x^1\ \ 8x^0$
resto: $7x+8$

c.) ej 3 c) cociente: x^2+3x+3 → procedimiento: $1x^2\ \ 3x^1\ \ 3x^0 \mid 9x^1\ \ -2x^0$
resto: $9x-2$

d.) ej 3 d) cociente: $2x^3+4x^2+7x+12$ → procedimiento: $2x^3\ \ 4x^2\ \ 7x^1\ \ 12^0 \mid 46x^1\ \ 17x^0$
resto: $46x+17$

e.) ej 4 b) cociente: $x^5-2x^4+4x^3-x^2-5x+14$ → $x^5\ \ -2x^4\ \ 4x^3\ \ -x^2\ \ -5x^1\ \ 14x^0 \mid -17x^4\ \ -25x^3\ \ 2x^2\ \ 2x^1$
resto: $-17x^4-25x^3+2x^2+2x$

f.) ej 4 c) cociente: x^2+3x+3 → $1x^2\ \ 3x^1\ \ 3x^0 \mid 9x^5\ \ -2x^4\ \ 3x^3\ \ 1x^2\ \ 0x^1\ \ 2x^0$
resto: $9x^5-2x^4+3x^3+x^2+2$

g.) ej 5 b) cociente: $3x^2+4x+1$ → $3x^2\ \ 4x^1\ \ 1x^0 \mid -3x^2\ \ -1x^1$
resto: $-3x^2-x$

(VII) Al igual que con los coeficientes del dividendo, para los coeficientes de **(-c)** que sean cero se coloca el cero en la posición que le corresponde.

a.) Dividir $3x^4+2x^3-x^2+2x-6$ por x^3+2x .... [aquí **(-c)**=$0x^2+2x$]

	3	2	-1	2	-6
(0)(-2)		0	-6	-4	
	3	2	-7	-2	$\boxed{-6}$
			0		
			-7		

Cociente: $3x+2$
resto: $-7x^2-2x-6$

b.) Dividir x^4-3x^2-2x+3 por x^3-4 .... [aquí **(-c)**=$0x^2+0x-4$]

	1	0	-3	-2	3
(0)(0)(4)		0	0	4	0
	1	0	-3	2	3
			0	0	
			-3	2	

cociente: x
resto: $-3x^2+2x+3$

c.) Dividir $3x^5+4x^3+3x^2$ por $3x^3+x$ .... [aquí **(-c)**=$0x^2+x$]

$$\begin{array}{r|rrr:rr}
3 & 3 & 0 & 4 & 3 & 0 \\
(0)(-1) & & 0 & -1 & 0 & -1 \\
\hline
 & 3:3 & 0:3 & 3 & 3 & -1 \\
 & 1 & 0 & 0 & & \\
 & & & 3:3 & & \\
 & & & 1 & &
\end{array}$$

Se agregó un cero

No son multiplicados ni divididos

Tuvieron que ser multiplicados por 0 y -1 y divididos por 3

Línea de separación para los 3 primeros coeficientes

cociente: x^2+1 resto: $3x^2-x$

(VIII). Cuando el divisor es un monomio (ejemplo $3x^2$) se sigue considerando como un binomio de la forma x-c, donde **(x)** es el monomio dado y **(-c)** es cero (ejemplo $3x^2+0$), luego el coeficiente de **(-c)** es cero y se coloca a la izquierda de la tabla y sobre este el coeficiente del monomio.

a) Dividir $6x^5+5x^4+x^3$ por x^2

Se considera x^2 como x^2+0, donde **(x)**=x^2 y **(-c)**=0. En este caso, no es necesario colocar el coeficiente mayor del divisor (es la unidad) sobre el coeficiente de **(-c)**. Se agrega un cero junto a los coeficientes del dividendo, al final, porque el menor exponente de la variable del dividendo es 3 y el del divisor es 2, y 3-2=1.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 6 & 5 & 1 & 0 \\
(0) & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 6 & 5 & 1 & 0
\end{array}$$

Cociente: $6x^3+5x^2+x$
Resto: 0

b) Dividir $3x^4-2x^3+x^2+3x+1$ por x^2

$$\begin{array}{r|rrr:rr}
 & 3 & -2 & 1 & 3 & 1 \\
(0) & & 0 & 0 & & \\
\hline
 & 3 & -2 & 1 & \boxed{3} & \boxed{1}
\end{array}$$

Cociente: $3x^2-2x+1$
Resto: $3x+1$

c) Dividir $4x^4$ por $2x^2$

$$\begin{array}{r|rrr:}
2 & 4 & 0 & 0 \\
(0) & & 0 & 0 \\
\hline
 & 4:2 & 0:2 & 0:2 \\
 & 2 & 0 & 0
\end{array}$$

Cociente: $2x^2$
Resto: 0

d) Dividir $5x^3+15x^2-10x$ por 5

En este caso, cuando el divisor es un monomio que a su vez es independiente de la variable, se sigue considerando como un binomio de la forma x-c (ejemplo $5x^0+0$), donde **(x)**=$5x^0$ y **(-c)**=0. El coeficiente mayor del divisor es 5 y se coloca sobre el coeficiente de **(-c)**, que es cero. La línea divisora vertical se pasa posterior a los 3-0+1=4 primeros coeficientes.

$$\begin{array}{c|cccc}
5 & 5 & 15 & -10 & 0 \\
(0) & & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 5:5 & 15:5 & -10:5 & 0:5 \\
 & 1 & 3 & -2 & 0
\end{array}$$

Cociente: x^3+3x^2-2x

Resto: 0

Triángulos de Michel y caja de triángulos para la Geometría fractal

Un fractal es un objeto semigeométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. A este tipo de objeto se le atribuyen las características de ser demasiado irregular para ser descrito en términos geométricos tradicionales, y ser autosimilar. Su forma es hecha de copias más pequeñas de la misma figura. Las copias son similares al todo: misma forma pero diferente tamaño.

Triángulo de Michel: se parte del triángulo equilátero de lado unidad T_0 y en el primer paso nos quedamos con los 3 triángulos equiláteros cerrados, $\{T_i^1\}_{i=1}^{3}$ contenidos en T_0 de lado $\frac{1}{3}$ y que contienen a sus vértices. En el paso 2 repetimos el proceso anterior a escala $\frac{1}{3}$ sobre cada uno de los triángulos obtenidos y llegamos a tener 3^2 triángulos cerrados de lado $\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$ y así sucesivamente. En el paso k tendremos 3^k triángulos cerrados, $\{T_i^k\}_{i=1}^{3^k}$, de lado 3^{-k} cada uno de ellos.

- Se define el Triángulo de Michel como:

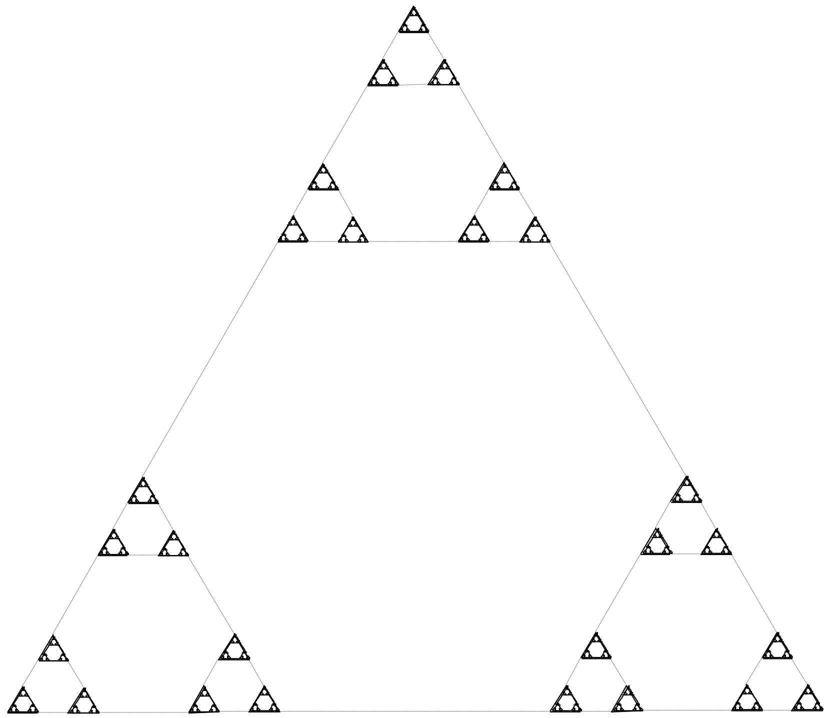
$$T=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{3^k}T_i^k$$

- Su área se puede definir como cero:

$$L^2(T)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{3^k}L^2(T_i^k)=\lim_{k\to\infty}(3^k\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^{-k}\cdot 3^{-k}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=\lim_{k\to\infty}(\frac{1}{2}\cdot 3^{-k}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})=\lim_{k\to\infty}(\frac{\sqrt{3}}{4\cdot 3^k})=0$$

- Su perímetro sería constante:

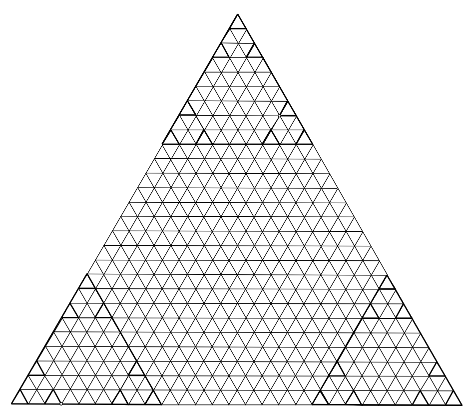
$$P(T)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{3^k}P(T_i^k)=\lim_{k\to\infty}(3^k\cdot 3\cdot 3^{-k})=3$$



¿Por qué el triángulo de Michel es autosemejante?

Para entender esto observemos la porción izquierda del triángulo, dicha porción contiene uno de los tres triángulos que quedan después del primer paso del proceso. Note que la longitud del lado de este triángulo es exactamente $\frac{1}{3}$ de la longitud del lado del triángulo original. Note también que hemos obtenido infinitamente triángulos a partir de este pequeño triángulo igual que lo obtuvimos a él a partir del original. Sin embargo, si observamos el triángulo a través de un microscopio que multiplique todas las dimensiones por un múltiplo de 3, entonces veremos completamente al triángulo de Michel, esto es que este pequeño triángulo, cuando es multiplicado por un múltiplo de 3, es exactamente igual al triángulo completo. Esto no significa el fin de la historia. Supongamos que tomamos cualquiera de los nueve triángulos que quedan después del segundo paso del proceso, si multiplicamos este triángulo por un múltiplo de 9 encontraremos otra vez el triángulo original, y si multiplicamos la porción del triángulo de Michel dentro de este triángulo pequeño por 9 encontraremos otra vez la figura original.

Esto significa que no importa cuán "profundo" miremos el triángulo. La porción del triángulo contenida en un triángulo obtenido en el n-ésimo paso, cuando la multiplicamos por un múltiplo de 3^n es exactamente igual al triángulo completo. Esto es autosemejanza.



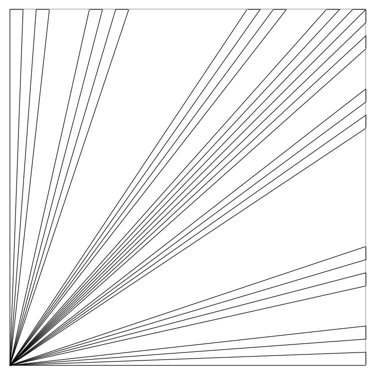
Triángulo de Michel 2*:* se parte del triángulo equilátero de lado unidad T_0 y en el primer paso queda dividido en los tres triángulos equiláteros cerrados contenidos en T_0 de lado $\frac{1}{3}$ y que contienen a sus vértices, y los seis triángulos equiláteros del hexágono regular de lado $\frac{1}{3}$ que se obtiene al centro de T_0 al eliminar los tres triángulos equiláteros cerrados de lado $\frac{1}{3}$ que contienen sus vértices. Por tanto, en el primer paso tendremos 9^1 triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{3^1}$, $\{T_i^1\}_{i=1}^{9^1}$. En el paso 2 repetimos el proceso anterior a escala $\frac{1}{3}$ sobre cada uno de los triángulos obtenidos y llegamos a tener $9^2 = 81$ triángulos equiláteros de lado $\frac{1}{3^2}$, $\{T_i^2\}_{i=1}^{9^2}$, y así sucesivamente en el paso k tendremos 9^k triángulos equiláteros, $\{T_i^k\}_{i=1}^{9^k}$ de lado $\frac{1}{3^k} = 3^{-k}$ cada uno de ellos.

- Se define el segundo triángulo de Michel como: $T = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{9^k} T_i^k$
- Su área sería constante:

$$L^2(T) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{9^k} L^2(T_i^k) = \lim_{k\to\infty} (9^k \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{-k} \cdot 3^{-k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \lim_{k\to\infty} (9^k \cdot 9^{-k} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- El perímetro sería infinito:

$$P(T) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{9^k} P(T_i^k) = \lim_{k\to\infty} (9^k \cdot 3 \cdot 3^{-k}) = \lim_{k\to\infty} (3^k \cdot 3^k \cdot 3^{-k} \cdot 3) = 3 \lim_{k\to\infty} 3^k = \infty$$



Caja de triángulos: se parte del cuadrado unidad $Q_0 = [0;1] \times [0;1]$ y en el primer paso nos quedamos con los $2^{1+1} = 2^2 = 4$ triángulos cerrados $\{Q_i^1\}_{i=1}^{2^{1+1}} = \{Q_i^1\}_{i=1}^{4}$ contenidos en Q_0 de lado de la base $\frac{1}{3}$ y altura $h = 1$, y que contienen a sus vértices cuyas áreas serían $\frac{1}{3^1 \cdot 2}$. En el paso 2 repetimos el proceso anterior a escala $\frac{1}{3}$ sobre cada uno de los triángulos obtenidos y llegamos a tener $2^{1+2} = 2^3 = 8$ triángulos cerrados de lado de la base $\frac{1}{3^2}$ y altura $h = 1$ cuyas áreas serían $\frac{1}{3^2 \cdot 2}$ y así sucesivamente en el paso k tendremos 2^{k+1} triángulos cerrados $\{Q_i^k\}_{i=1}^{2^{k+1}}$ de lado de la base $\frac{1}{3^k} = 3^{-k}$ cada uno de ellos, todos con altura $h = 1$ y por tanto el área igual a $\frac{1}{2} \cdot 3^{-k}$.

- Se define la caja de triángulos como:

$$Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^{k+1}} Q_i^k$$

- Su área sería definida como cero:

$$L^2(Q) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{2^{k+1}} L^2(Q_i^k) = \lim_{k\to\infty} (2^{k+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^{-k}) = \lim_{k\to\infty} (2^k \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^k}) = \lim_{k\to\infty} (\frac{2^k}{3^k}) = 0$$

- El perímetro sería infinito:

$$P(Q) > \lim_{k\to\infty} (2^{k+1} \cdot 1) = \lim_{k\to\infty} (2^k \cdot 2 \cdot 1) = 2 \cdot 1 \cdot \lim_{k\to\infty} 2^k = \infty$$

La realización de la división de polinomios siguiendo la regla práctica planteada y la ejemplificación en la Geometría fractal con los triángulos presentados, dota a los estudiantes de nuevas herramientas en el enfrentamiento a estos tópicos. Esto permite a profesores y estudiantes indagar más sobre su propia práctica y fortalecer los conocimientos que poseen. En el aspecto instructivo pueden propiciarse efectos positivos para los estudiantes con la Regla de Gamboa, ya que estos conocen la Regla de Ruffini y el método de los coeficientes indeterminados, lo que posibilita una participación más activa y reflexiva en la elaboración del objeto matemático división entera de polinomios.

Esto podrían realizarlo a través de las experiencias escolares previas para que construyan y atribuyan significados a lo que aprenden. El profesor puede tomar la decisión de cuál o cuáles de estas nuevas representaciones emplear, atendiendo al diagnóstico pedagógico integral, y brindar un mejor tratamiento a los errores y potencial de los estudiantes.

REFERENCIAS

Amoros, A. y otros (2008). *Base/10: Consultor didáctico*. Barcelona: RED.

División (s.a). En: *Diccionario enciclopédico Hispano-americano de literatura, ciencia, artes*, (s.n.), t. VII, pp. 777-779.

Expresiones algebraicas (2010). En: *Enciclopedia autodidáctica interactiva Océano*, t. III, capítulo 9, pp. 656-666. Barcelona: Océano.

Fractal. Recuperado de http://www.ecured.cu/index.php/Fractal (Consultado en octubre de 2011)

Gamboa G, M. E. y otros (2012). Alternativa metodológica para el diseño de unidades didácticas de la matemática en la Secundaria Básica. *Opuntia Brava*, 4(4). Recuperado de http://opuntiabrava.rimed.cu

González, M. O. (2008). *Matemática: quinto curso: complementos de Aritmética y Álgebra*, t.1. La Habana: Pueblo y Educación.

Reyes Pérez, I. F.; Silva Téllez, N. y Fernández Chelala, R. M. (2010). Algunas reflexiones sobre la solución de problemas en la Escuela Primaria. *Opuntia Brava*, 2(2). Recuperado de http://opuntiabrava.rimed.cu

Santamaría, C. (2005). *Diccionario de Matemática de primaria y secundaria*. Madrid: Escuela Española.

Zaldívar Henríquez, L. y Rodríguez Ortiz, M. (2010). ¿Cómo es el aprendizaje de la matemática en los alumnos de las enseñanzas Media Básica y Media Superior? *Opuntia Brava*, 2(4). Recuperado de http://opuntiabrava.rimed.cu