

Determinación del perfil de temperatura a pared sometida a régimen estacionario de transferencia de calor

Determination of the temperature profile of a wall subjected to a steady heat transfer regime

Daniel Rodríguez Peña¹ (daniel@ult.edu.cu) (<https://orcid.org/0000-0002-9584-7137>)
danielrpena@gmail.com

Antonio Carvajal Álvarez² (juan.alvarez@unic.co.ao) (<https://orcid.org/0000-0003-3309-6304>)

Lizbeth Lisandra Lodeiro Santiesteban³ (lisandra981001@gmail.com)
(<https://orcid.org/0009-0004-7889-4857>)

Resumen

En el presente artículo se trató el uso del método numérico de diferencias finitas para determinar los perfiles de temperaturas de una pared infinita sometida a régimen estacionario de transferencia de calor, teniendo en cuenta dos situaciones. En primer orden se trató el caso de la pared, conocidas las temperaturas de sus extremos, en el cual el mecanismo de transferencia de calor está determinado por la ley de Fourier para la conducción. En el segundo caso a la misma pared se le adiciona la presencia de fluidos a ambos lados, lo que provoca que ocurra la transferencia de calor por convección entre la pared y los fluidos, por lo que se tiene en cuenta la ley del primer caso, y la ley de Newton para la convección. El método usado es el de diferencias finitas. Como consecuencia de la aplicación del método se obtiene una matriz cuya solución permite conocer el perfil de temperatura de la pared. Al finalizar cada caso se ilustra con un ejemplo la aplicación del Excel para la solución de las matrices y la obtención del gráfico del perfil de temperatura.

Palabras clave: diferencias finitas, perfil de temperatura, transferencia de calor.

Abstract

This article addressed the use of the finite difference numerical method to determine the temperature profiles of an infinite wall under steady-state heat transfer conditions, keeping in mind two situations. In first order it was the case of the wall, well-known the temperatures of their ends, in which the mechanism of transfer of heat is determined by the law of Fourier for the conduction. In the second case to the same wall is added the presence of fluids to both sides, what causes that it happens the transfer of heat for

¹ Máster en Eficiencia Energética. Ingeniero Mecánico. Profesor Auxiliar. Director Unidad de Desarrollo e Innovación Centro de Estudios de Eficiencia Energética y Procesos Tecnológicos. Universidad de Las Tunas. Cuba.

² Licenciado en Física. Profesor Auxiliar. Profesor de la Universidade Internacional do Cuanza Fundação Universitária Euroafricana.

³ Máster en Eficiencia Energética. Ingeniera Industrial. Profesora Instructora. Unidad de Desarrollo e Innovación Centro de Estudios de Eficiencia Energética y Procesos Tecnológicos. Universidad de Las Tunas. Cuba.

convection between the wall and the fluids, for what one keeps in mind the law of the first case, and Newton law for the convection. As consequence of the application of the method a womb is obtained whose solution allows to know the profile of temperature of the wall. When concluding each case, it is illustrated with an example the application of the Excel for the solution of the wombs and the obtaining of the graph of the profile of temperature.

Key words: finite differences, temperature profile, heat transfer.

Introducción

El estudio de los fenómenos de transporte reviste en la actualidad un amplio interés, dada su frecuente presencia en los procesos de la naturaleza, la sociedad y la vida, en los cuales se necesita realizar una enorme cantidad de actividades y de operaciones, que implican la transformación y transferencia de la energía, a fin de lograr los bienes y servicios que hacen adecuada la vida del ser humano (Bird, Stewart & Lightfoot, 2020).

La transferencia de calor es un fenómeno de transporte que ocurre a través de los límites de un sistema, causada solamente por diferencia de temperaturas (Cengel & Ghajar, 2020). Los objetivos primarios o primordiales en el análisis de los problemas relacionados con la transferencia de calor están dados en Incropera & DeWitt (2019):

1. Determinar la distribución de temperaturas dentro de un sistema y la razón o velocidad del calor transferido para unas condiciones de trabajo o de fronteras dadas (función evaluación).
2. Especificar la configuración necesaria, geometría y dimensiones, con el propósito de lograr una razón de transferencia de calor (función de diseño).

En síntesis, los problemas de transferencia de calor tienen dos vertientes fundamentales que son la evaluación y diseño de sistemas, en este caso vamos a tratar principalmente la función evaluativa, aunque los resultados obtenidos pueden utilizarse como criterio de diseño. Las soluciones a estos problemas en la bibliografía convencional vienen dadas generalmente de forma analítica, para los cuales en ocasiones no existe una solución "exacta" por los métodos clásicos, o son tales que su solución solo puede ser obtenida de forma tan complicada que hace que en la práctica no sea viable. Con el uso de métodos numéricos se pueden eliminar la complejidad de las matemáticas y obtener soluciones tan exactas como se desee (Chapra et al., 2011; Murillo, 2021).

A continuación, se presenta la aplicación del método numérico de diferencias finitas para determinar el perfil de temperatura en dos casos básicos. El primer caso una pared infinita con temperaturas conocidas y diferentes en sus extremos con el mecanismo de transferencia de calor por conducción, y el segundo caso la misma pared adicionándole la convección al mecanismo de conducción por estar en contacto con fluidos a distintas temperaturas.

Materiales y métodos

En primer orden se trató el caso de la pared, conocidas las temperaturas de sus extremos, en el cual el mecanismo de transferencia de calor está determinado por la ley de Fourier para la conducción. En el segundo caso a la misma pared se le adiciona la presencia de fluidos a ambos lados, lo que provoca que ocurra la transferencia de calor por convección entre la pared y los fluidos, por lo que se tiene en cuenta la ley del primer caso, y la ley de Newton para la convección. El método usado es el de diferencias finitas.

Resultados

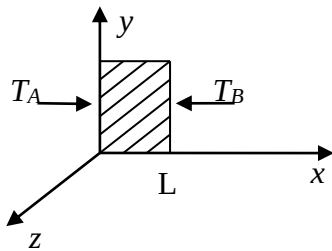
CASO 1: Obtención del perfil de temperatura de una pared para el caso de conducción en estado estacionario utilizando el método numérico de diferencias finitas.

Condiciones de frontera:

- Temperaturas de los lados de la pared T_A , T_B conocidas ($T_A > T_B$).
- Condiciones de frontera de primera especie.

Figura 1

Condiciones de frontera, caso 1



Consideraciones preliminares:

- Pared infinita en las coordenadas y , z .
- Material isótropo y homogéneo.
- Proceso de transferencia de calor por conducción en estado estacionario.
- Conductividad térmica constante para el rango de temperatura analizada.

Bajo estas condiciones se puede analizar el sistema como unidimensional en la dirección de eje x , en las direcciones de y , z se tienen planos o superficies isotérmicas, por lo que no hay transferencia de calor en estas direcciones. Para el estudio del perfil de temperatura, analizaremos varios casos, comenzando por el más simple de todos que es cuando se quiere conocer la temperatura de un solo nodo, luego para dos, tres y

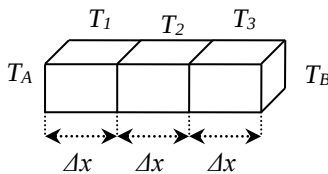
cuatro respectivamente hasta lograr determinar un sistema de ecuaciones general que modele el proceso para un número de nodos arbitrario (n-nodos).

1. Para un nodo desconocido.

Primero se toma un elemento de un volumen diferencial de sección transversal cuadrada y constante en la dirección del eje x y se divide en tres partes de longitud $\Delta x = L/3$, se representan las temperaturas correspondientes a cada parte como T_1 , T_2 y T_3 , tomando $T_1 = T_A$, $T_3 = T_B$ y T_2 desconocida (fig. 2).

Figura 2

Temperaturas correspondientes



$$\Delta x = \frac{L}{3}$$

Ecuaciones

Se realiza el análisis del flujo de calor para el nodo "2"

Es necesario determinar una ecuación con una incógnita.

$$dq = q_x - q_{x+\Delta x} = 0 \quad \frac{dT}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T - T_{x+\Delta x}}{\Delta x}; \quad \frac{dT}{dx} \propto \frac{T_x - T_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

Sustituyendo la función de Fourier que modela el mecanismo de transferencia de calor por conducción se obtiene:

$$k \cdot A \frac{(T_2 - T_1)}{\Delta x} = k \cdot A \frac{(T_3 - T_2)}{\Delta x}$$

$$T_2 - T_1 = T_3 - T_2$$

$$T_2 - T_A = T_B - T_2$$

$$2 \cdot T_2 = T_A + T_B$$

$$T_2 = \frac{T_A + T_B}{2}$$

Como las secciones transversales y las divisiones de los intervalos de longitud son iguales para cada nodo, se pueden simplificar.

Ecuación algebraica lineal con una incógnita.

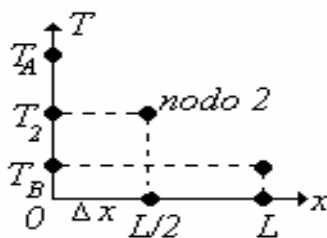
Como se puede observar a diferencia del método analítico en este caso no se resuelve una ecuación diferencial sino una ecuación algebraica.



La temperatura del centro de la pared es siempre la media aritmética de las bases. En el perfil (Fig.3) aparecen puntos en el plano T_x .

Figura 3

Puntos en el plano



2. Para dos nodos desconocidos T_2 y T_3 (Fig.4).

Figura 4

Temperaturas en nodos

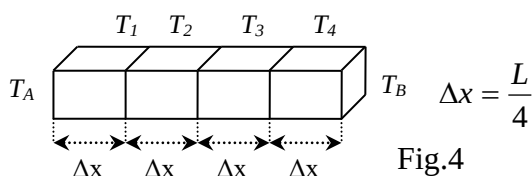


Fig.4

Se aplica el mismo procedimiento anterior para los nodos con temperaturas desconocidas.

$$T_1 = T_A, T_4 = T_B$$

Teniendo en cuenta el resultado anterior podemos plantear las ecuaciones de cada nodo de la siguiente forma.

Tabla 1

Ecuaciones de cada nodo

Nodo 2:

$$T_2 - T_1 = T_3 - T_2$$

$$2 \cdot T_2 - T_3 = T_1$$

$$2 \cdot T_2 - T_3 = T_A$$

Nodo 3:

$$T_3 - T_2 = T_4 - T_3$$

$$2 \cdot T_3 - T_2 = T_4$$

$$-T_2 + 2 \cdot T_3 = T_B$$

Sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$2 \cdot T_2 - T_3 = T_A$$

$$-T_2 + 2 \cdot T_3 = T_B$$

Matriz ampliada del sistema.

$$\left| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & T_A \\ -1 & 2 & T_B \end{array} \right|$$

Sistema compatible determinado, con solución única ($\Delta_s \neq 0$)

Podemos observar que en los dos casos anteriores los perfiles de temperaturas forman distribuciones discretas de puntos en el plano "Tx" a diferencia del caso analítico que son líneas rectas continuas (Fig.5).

Figura 5

Distribuciones de puntos en el plano

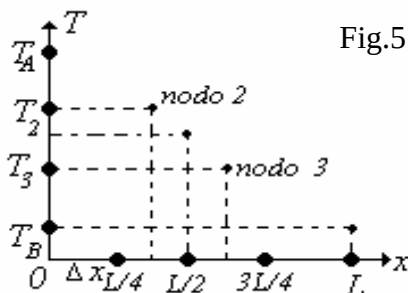
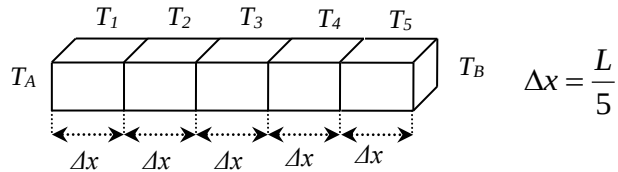


Fig.5

3. Para tres nodos desconocidos T_2 , T_3 y T_4 (Fig.6).

Figura 6

Nodos desconocidos



$$T_1 = T_A$$

$$T_5 = T_B$$

Como se puede observar las ecuaciones para los nodos 2 y 3 son iguales que anteriormente.

Nodo 4.

Así obtenemos el siguiente sistema.

$$T_4 - T_3 = T_5 - T_4$$

$$-T_3 + 2 \cdot T_4 = T_B$$

Sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas y tres ecuaciones

$$2 \cdot T_2 - T_3 + 0 = T_A$$

$$-T_2 + 2 \cdot T_3 - T_4 = 0$$

$$0 - T_3 + 2 \cdot T_4 = T_B$$

Matriz ampliada del sistema:

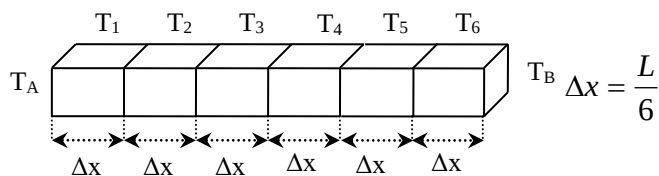
$$\left| \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & T_A \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & T_B \end{array} \right|$$

Sistema compatible determinado con solución única ($\Delta_s \neq 0$).

4. Cuatro Nodos Fig.7.

Figura 7

Cuatro nodos



$$T_1 = T_A$$

$$T_6 = T_B$$

Las ecuaciones de los nodos 2, 3 y 4 fueron obtenidas anteriormente.

Nodo 5 $T_5 - T_4 = T_6 - T_5$

Así se obtiene el siguiente sistema: $2 \cdot T_5 - T_4 = T_6$

$$0 + 0 - T_4 + 2 \cdot T_5 = T_B$$

Sistema de ecuaciones lineales con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

$$2 \cdot T_2 - T_3 + 0 + 0 = T_A$$

$$-T_2 + 2 \cdot T_3 - T_4 + 0 = 0$$

$$0 - T_3 + 2 \cdot T_4 - T_5 = 0$$

$$0 + 0 - T_4 + 2 \cdot T_5 = T_B$$

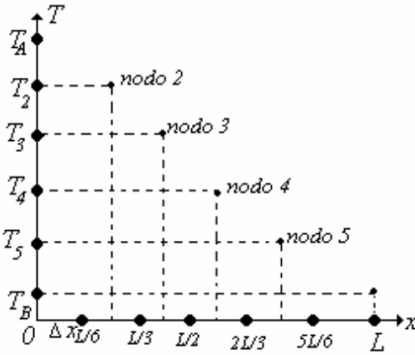
Matriz ampliada del sistema:

$$\begin{array}{c|ccc|c}
 2 & -1 & 0 & 0 & T_A \\
 -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 2 & T_B
 \end{array}$$

Sistema compatible determinado con solución única. Los gráficos de las soluciones se observan en la Fig.8

Figura 8

Gráfico de las soluciones



Para “n” nodos con dos temperaturas conocidas se obtiene un sistema no homogéneo de $n-2$ ecuaciones con $n-2$ incógnitas que coinciden con las temperaturas desconocidas que serían:

$$T_2, T_3, T_4, \dots, T_{n-1} \quad \text{con} \quad T_1 = T_A, T_n = T_B$$

$$2 \cdot T_2 - T_3 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = T_A$$

$$-T_2 + 2 \cdot T_3 - T_4 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$0 - T_3 + 2 \cdot T_4 - T_5 + 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

$$0 + 0 - T_4 + 2 \cdot T_5 - T_6 + 0 + \dots + 0 = 0$$

.....

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 \dots - T_{n-2} + 2 \cdot T_{n-1} = T_B$$

Matriz ampliada del sistema:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ T_B \end{vmatrix}$$

Evaluando este sistema se pueden determinar los perfiles de temperatura para las condiciones dadas.

Existen muchos métodos para solucionar este sistema, pero lo más eficiente es utilizar un programa de computación, ya que en la medida que se necesita más precisión los cálculos se hacen tediosos y engorrosos.

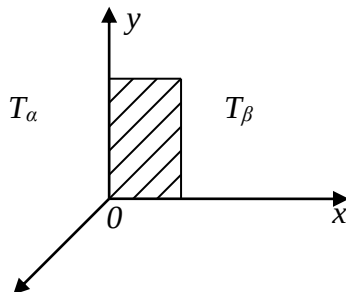
CASO 2: Obtención del perfil de temperatura de una pared que se encuentra entre dos fluidos a temperaturas distintas por los mecanismos de transferencia de calor por convección y conducción en estado estacionario, utilizando el método numérico de diferencias finitas.

Condiciones de frontera (fig. 9):

- Temperaturas de los fluidos T_α , T_β , $T_\alpha > T_\beta$.
- Coeficientes locales de transmisión superficial del calor: h_1 , h_2 .
- Conductividad Térmica de la pared: k .
- Condiciones de fronteras de tercera especie.

Figura 9

Condiciones de frontera caso 2



Consideraciones preliminares.

- Pared infinita en las coordenadas y , z
- Material isótropo y homogéneo.
- Proceso de transmisión de calor por convección y conducción en estado estacionario.
- Conductividad térmica constante para el rango de temperatura analizado.
- T_α , T_β , h_1 , h_2 son constantes para toda la superficie.

Este sistema puede ser analizado como unidimensional en la dirección del eje x , en las direcciones de x y z se tienen planos o superficies isotérmicas, por lo que no hay transferencias de calor en esas direcciones.

Igual que en el caso anterior, para el estudio del perfil de temperatura analizaremos varios casos, comenzando por el más simple que es cuando se desconoce la

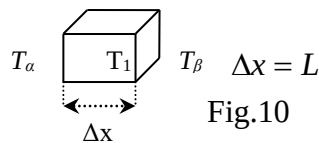
temperatura de un solo nodo, después seguiremos el proceso para el caso de varios nodos hasta generalizar la solución del sistema de ecuaciones que se obtiene, para un número de nodos arbitrario (n-nodos).

1. Para un nodo.

- Primero se toma un elemento de un volumen diferencial (fig. 10) de sección transversal cuadrada y constante en la dirección del eje x, y se representan las temperaturas.

Figura 10

Representación



- Se realiza el análisis del flujo de calor para el nodo 1.
- Es necesario determinar una ecuación con una incógnita (T_2)

Ecuaciones

$$q_x = q_{x+\Delta x}$$

$$dq = q_x - q_{x+\Delta x} = 0 \rightarrow \text{Caso estacionario} \rightarrow \frac{dT}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T_x - T_{x-\Delta x}}{\Delta x}; \quad \frac{dT}{dx} \propto \frac{T_x - T_{x-\Delta x}}{\Delta x}$$

Sustituyendo las funciones de Newton y Fourier se obtiene:

$$h_\alpha (T_1 - T_\alpha) = h_\beta (T_\beta - T_1), \quad h_\alpha, h_\beta \rightarrow \text{Son constantes para los fluidos y la pared del sólido respectivamente (conocidas).}$$

$$h_\beta \cdot T_\beta - h_\beta \cdot T_1 = T_1$$

$$h_\alpha \cdot T_1 + h_\beta \cdot T_1 = h_\beta \cdot T_\beta + h_\alpha \cdot T_\alpha \rightarrow \text{Se resuelve una ecuación algebraica con una incógnita, a diferencia del método analítico que se resuelve una ecuación diferencial.}$$

$$T_1 \cdot (h_\alpha + h_\beta) = h_\beta \cdot T_\beta + h_\alpha \cdot T_\alpha$$

$$T_1 = \frac{h_\beta \cdot T_\beta + h_\alpha \cdot T_\alpha}{h_\alpha + h_\beta}$$

Discusión

Como se puede observar esta solución da la dependencia de la temperatura de la pared con las de los fluidos.

Determinar esta solución para el caso de una pared en la cual se tome un solo nodo es relativamente sencillo, pero para el caso de varios nodos la solución puede ser bastante compleja por lo que aquí nos detendremos solo a determinar la matriz ampliada del

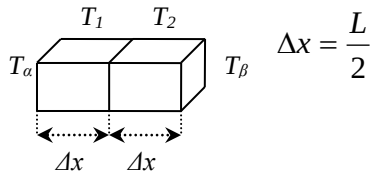
sistema de ecuaciones que modela el proceso, siendo necesario para el caso de cualquier evaluación, resolver dicha matriz utilizando programas de computación especializados. Obteniéndose el perfil de temperatura como puntos del plano T_x los cuales no vamos a representar ahora por carecer de soluciones para los distintos casos.

2. Para dos nodos.

Se aplica el mismo procedimiento anterior para los nodos con temperaturas desconocidas, y teniendo en cuenta las transferencias de calor por convección (Newton) y conducción (Fourier) (fig. 11).

Figura 11

Aplicación del procedimiento para dos nodos



Hacen falta dos ecuaciones para determinar T_1 y T_2

Nodo 1: Nodo: 2

$$\begin{aligned}
 h_\alpha(T_1 - T_\alpha) &= k \frac{(T_2 - T_1)}{\Delta x} \\
 h_\alpha \cdot T_1 - h_\alpha \cdot T_\alpha &= \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_1}{\Delta x} \\
 h_\alpha \cdot T_1 - \frac{k \cdot T_1}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} &= h_\alpha \cdot T_\alpha \\
 (1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{k(T_2 - T_1)}{\Delta x} &= h_\beta(T_\beta - T_2) \\
 \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_1}{\Delta x} &= h_\beta \cdot T_\beta - h_\beta \cdot T_2 \\
 -\frac{k \cdot T_1}{\Delta x} + -\frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + h_\beta T_2 &= h_\beta \cdot T_\beta \\
 (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (h_\alpha + \frac{k}{\Delta x})T_1 - \frac{k}{\Delta x} \cdot T_2 &= h_\alpha \cdot T_\alpha \\
 -\frac{k}{\Delta x} \cdot T_1 + (h_\beta + \frac{k}{\Delta x})T_2 &= h_\beta \cdot T_\beta
 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, cuya matriz ampliada es:

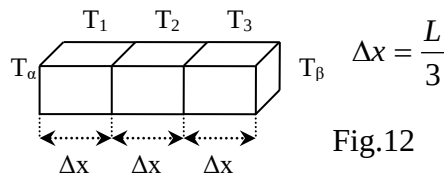
$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\Delta x} + h_\alpha & -\frac{k}{\Delta x} \\ -\frac{k}{\Delta x} & \frac{k}{\Delta x} + h_\beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_\alpha \cdot T_\alpha \\ h_\beta \cdot T_\beta \end{vmatrix}$$

Como las ecuaciones son linealmente independientes y el determinante del sistema es distinto de cero ($\Delta_s \neq 0$), el sistema es entonces compatible determinado, con solución única.

3. Para tres nodos (fig. 12).

Figura 12

Representación de tres nodos

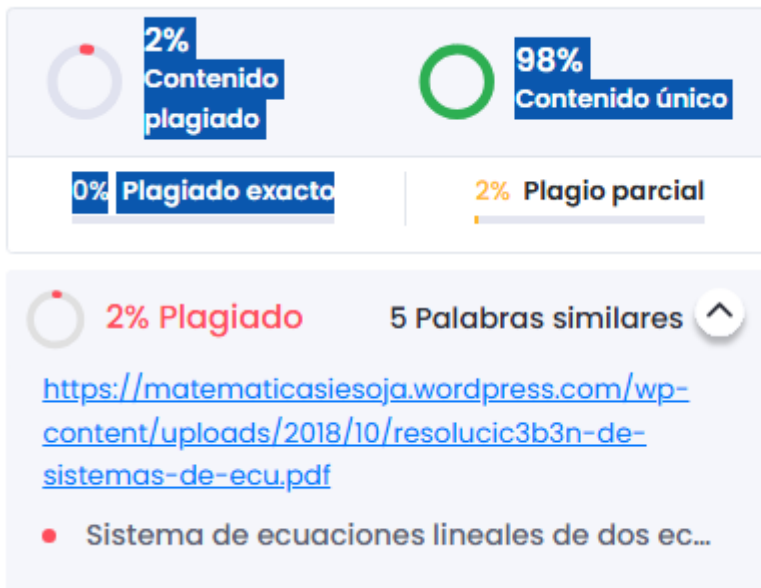


Continuando con el procedimiento anterior se obtiene.

Tabla 2

Resultados

Nodo1	Nodo2	Nodo3
$h_\alpha(T_1 - T_\alpha) = \frac{k(T_2 - T_1)}{\Delta x}$	$\frac{k(T_2 - T_1)}{\Delta x} = \frac{k(T_3 - T_2)}{\Delta x}$	$\frac{k(T_3 - T_2)}{\Delta x} = h_\beta(T_\beta - T_3)$
$h_\alpha \cdot T_1 - h_\alpha \cdot T_\alpha = \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_1}{\Delta x}$	$\frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_1}{\Delta x} = \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x}$	$\frac{k \cdot T_3}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} = h_\beta \cdot T_\beta - h_\beta \cdot T_\beta$
$h_\alpha \cdot T_1 + \frac{k \cdot T_1}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + 0 = h_\alpha \cdot T_\alpha$	$-\frac{k \cdot T_1}{\Delta x} + \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} = 0$	$0 - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} + h_\beta \cdot T_3 = h_\beta \cdot T_\beta$
$\left(\frac{k}{\Delta x} + h_\alpha\right)T_1 - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + 0 = h_\alpha \cdot T_\alpha$	$-\frac{k \cdot T_1}{\Delta x} + \frac{2 \cdot k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} = 0$	$0 - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + \left(\frac{k}{\Delta x} + h_\beta\right) = h_\beta \cdot T_\beta$



Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas, cuya matriz ampliada es:

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{\Delta x} + h_{\alpha} & -\frac{k}{\Delta x} & 0 \\ -\frac{k}{\Delta x} & 2\frac{k}{\Delta x} & -\frac{k}{\Delta x} \\ 0 & -\frac{k}{\Delta x} & \frac{k}{\Delta x} + h_{\beta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{\alpha} \cdot T_{\alpha} \\ 0 \\ h_{\beta} \cdot T_{\beta} \end{vmatrix}$$

Como las ecuaciones son linealmente independientes y el determinante es distinto de cero ($\Delta_s \neq 0$), el sistema es entonces compatible determinado con solución única.

4. Para cuatro nodos (fig. 13).

Figura 13

Representación de cuatro nodos

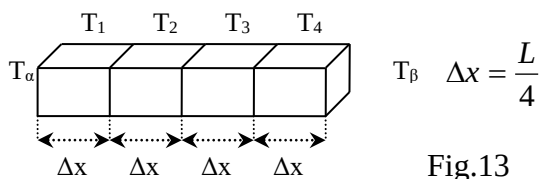


Fig.13

Continuamos con el mismo procedimiento:

$$\text{Nodo 1: } h_{\alpha}(T_1 - T_{\alpha}) = \frac{k(T_2 - T_1)}{\Delta x} \rightarrow h_{\alpha} \cdot T_1 - h_{\alpha} \cdot T_{\alpha} = \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_1}{\Delta x}$$

$$\text{Nodo 2: } \frac{k(T_2 - T_1)}{\Delta x} = \frac{k(T_3 - T_2)}{\Delta x} \rightarrow \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_1}{\Delta x} = \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x}$$

$$\text{Nodo 3: } \frac{k(T_3 - T_2)}{\Delta x} = \frac{k(T_4 - T_3)}{\Delta x} \rightarrow \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} = \frac{k \cdot T_4}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_3}{\Delta x}$$

$$\text{Nodo 4: } \frac{k(T_4 - T_3)}{\Delta x} = h_{\beta}(T_{\beta} - T_4) \rightarrow \frac{k \cdot T_4}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} = h_{\beta} \cdot T_{\beta} - h_{\beta} \cdot T_4$$



$$h_{\alpha} \cdot T_1 + \frac{k \cdot T_1}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} = h_{\alpha} \cdot T_{\alpha} \rightarrow \left(\frac{k}{\Delta x} + h_{\alpha}\right)T_1 - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + 0 + 0 = h_{\alpha} \cdot T_{\alpha}$$

$$-\frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} = 0 \rightarrow -\frac{k \cdot T_1}{\Delta x} + \frac{2 \cdot k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} + 0 = 0$$

$$-\frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} + \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_4}{\Delta x} = 0 \rightarrow 0 - \frac{k \cdot T_2}{\Delta x} + \frac{2 \cdot k \cdot T_3}{\Delta x} - \frac{k \cdot T_4}{\Delta x} = 0$$

$$-\frac{k \cdot T_3}{\Delta x} + \left(\frac{k}{\Delta x} + h_{\beta}\right)T_4 = h_{\beta} \cdot T_{\beta} \rightarrow 0 + 0 - \frac{k \cdot T_3}{\Delta x} + \left(\frac{k}{\Delta x} + h_{\beta}\right)T_4 = h_{\beta} \cdot T_{\beta}$$

Sistemas de ecuaciones lineales con cuatro incógnitas cuya matriz ampliada es:

$$\left| \begin{array}{cccc|c} \frac{k}{\Delta x} + h_{\alpha} & -\frac{k}{\Delta x} & 0 & 0 & h_{\alpha} \cdot T_{\alpha} \\ -\frac{k}{\Delta x} & \frac{2 \cdot k}{\Delta x} & -\frac{k}{\Delta x} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k}{\Delta x} & \frac{2 \cdot k}{\Delta x} & -\frac{k}{\Delta x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k}{\Delta x} & \frac{k}{\Delta x} + h_{\beta} & h_{\beta} \cdot T_{\beta} \end{array} \right| \quad / * \text{ Multiplicando por } \Delta x \text{ se obtiene:}$$

$$\left| \begin{array}{cccc|c} k + h_{\alpha} \cdot \Delta x & -k & 0 & 0 & h_{\alpha} \cdot T_{\alpha} \cdot \Delta x \\ -k & 2 \cdot k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2 \cdot k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & k + h_{\beta} \cdot \Delta x & h_{\beta} \cdot T_{\beta} \cdot \Delta x \end{array} \right|$$

/: Dividiendo por k se obtiene finalmente:

$$\begin{vmatrix} 1 + h_{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{k} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 + h_{\beta} \cdot \frac{\Delta x}{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{\alpha} \cdot T_{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{k} \\ 0 \\ 0 \\ h_{\beta} \cdot T_{\beta} \cdot \frac{\Delta x}{k} \end{vmatrix}$$

Como las ecuaciones son linealmente independientes y el determinante del sistema es distinto de cero, el sistema es entonces compatible determinado con solución única.

Con el análisis de los resultados obtenidos hasta aquí se pueden observar las regularidades de las matrices obtenidas, siendo factible entonces la generalización para el uso de “ n ” nodos.

Para “ n ” nodos con las temperaturas conocidas, en este caso la de los fluidos, se obtiene un sistema no homogéneo de ecuaciones lineales de “ $N-2$ ” ecuaciones con “ $N-2$ ” incógnitas que coinciden con las temperaturas desconocidas que serían $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$, que al resolver el sistema quedarían expresadas en función de las temperaturas de los fluidos (T_{α}, T_{β}), las cuales se dan como datos.

La matriz ampliada para este sistema general sería:

$$\begin{vmatrix} 1 + h_{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{k} & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 + h_{\beta} \cdot \frac{\Delta x}{k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} h_{\alpha} \cdot T_{\alpha} \cdot \frac{\Delta x}{k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ h_{\beta} \cdot T_{\beta} \cdot \frac{\Delta x}{k} \end{vmatrix}$$

Evaluando este sistema se pueden determinar perfiles de temperaturas para casos concretos de la práctica bajo condiciones dadas. A continuación, se muestra un ejemplo con los siguientes datos, obteniendo los resultados y la gráfica correspondiente:

Datos y Matriz del sistema. En este caso para 10 nodos.

Tabla 3

Datos para para modelación con 10 nodos.

Determinación del perfil de temperatura de una pared plana infinita , con

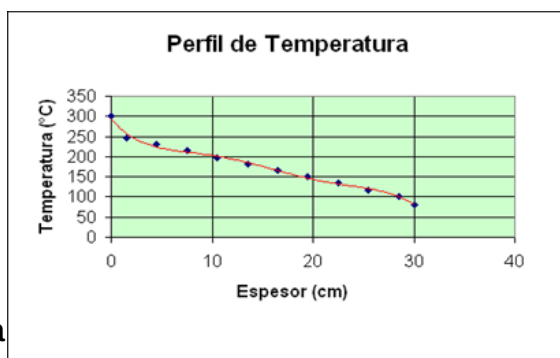
sus caras sometidas a las siguientes condiciones:

T_α	T_β	L	N	Δx	h_α	h_β	K
300	80	30	10	3	10	25	100

La solución se obtiene multiplicando la matriz inversa del sistema por la matriz vector de los términos independientes:

Figura 14

Gráfica del perfil obtenido para 10 nodos



Tabla

Soluci

Temperatura		Espesor	
T_α	300	x0	0
T1	246,3415	x1	1,5
T2	230,2439	x2	4,5
T3	214,1463	x3	7,5
T4	198,0488	x4	10,5
T5	181,9512	x5	13,5
T6	165,8537	x6	16,5
T7	149,7561	x7	19,5
T8	133,6585	x8	22,5

T9	117,561	x9	25,5
T10	101,4634	x10	28,5
T β	80	L	30

Se obtiene el perfil de temperatura y su gráfico, en este caso se observa la diferencia con respecto al otro al sumarle la convección que ocurre en los extremos de las paredes.

Conclusiones

Con la aplicación del método numérico de diferencia finita se obtuvo una solución apropiada para la determinación de perfiles de temperatura en paredes planas, la cual al compararse el gráfico resultante con el de las soluciones analíticas tiene un comportamiento similar.

El uso del Excel permite obtener los resultados de forma breve y con el grado de precisión deseado independientemente de la cantidad de nodos elegidos para realizar el estudio.

Referencias bibliográficas

- Bird, R. B., Stewart, W. E. & Lightfoot, E. N. (2020). *Fenómenos de transporte*. Reverté.
- Cengel, Y. A. & Ghajar, A. J. (2020). *Transferencia de calor y masa* (6th ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Chapra, S. C., Canale, R. P., Ruiz, R. S. G., Mercado, V. H. I., Díaz, E. M. & Benites, G. E. (2011). *Métodos numéricos para ingenieros* (Vol. 5). McGraw-Hill New York, NY, USA.
- Incropera, F. P., & DeWitt, D. P. (2019). *Fundamentos de transferencia de calor* (8va ed.). Pearson Educación.
- Murillo, J. Q. (2021). *Métodos numéricos en diferencias finitas para la resolución de ecuaciones difusivas fraccionarias*. [Doctorado. Universidad de Extremadura]. https://dehesa.unex.es:8443/bitstream/10662/4379/1/TDUEx_2016_Quintana_Murillo.pdf

Conflicto de intereses: Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

Contribución de los autores: Los autores participaron en la búsqueda y análisis de la información para el artículo, así como en su diseño y redacción.