# LA TRIGONOMETRÍA COMO FACTOR DE APRENDIZAJE EN LOS CONTENIDOS PRÁCTICOS DE LA TOPOGRAFÍA

# TRIGONOMETRY AS A LEARNING FACTOR IN THE PRACTICAL CONTENT OF TOPOGRAPHY

Katya Faggioni Colombo[1] (katya.faggionic@ug.edu.ec)
Ignacia Torres Villegas[2] (angelatorresvillegas@yahoo.com)
Washington Guillermo Meza Cabrera[3] (guiller_meza@hotmail.com)

## RESUMEN

El artículo se centra en la importancia que tiene la enseñanza-aprendizaje de la trigonometría en la aplicación de los cálculos topográficos en carreteras o vías de acceso. El estudio se realizó con los alumnos del segundo semestre de la carrera Ingeniería Civil de la universidad de Guayaquil, con el propósito de determinar los conocimientos adquiridos en la asignatura de Geometría, específicamente los relacionados con la trigonometría, para evaluar dicho conocimiento en los contenidos teórico-prácticos de la signatura de Topografía y los proyectos de titulación. Para ello se trabajó con un problema práctico de la vida real, relacionado con el cálculo topográfico del trazo y diseño geométrico de una carretera o vía de acceso, dicho estudio fue realizado en el recinto denominado camino vecinal Palo Alto del cantón Daule.

**PALABRAS CLAVES**: Enseñanza-aprendizaje, aprendizaje topográfico, cálculo topográfico, aprendizaje trigonométrico.

## ABSTRACT

The article focuses on the importance of teaching-learning trigonometry in the application of topographic calculations on roads or access roads. The study was carried out with the students of the second semester of the Civil Engineering career of the University of Guayaquil, with the purpose of determining the knowledge acquired in the subject of Geometry, specifically those related to trigonometry, to evaluate this knowledge in theoretical contents -practices of the Surveying signature and the projects of titulación. For this, we worked with a practical problem of real life, related to the topographical calculation of the trace and geometric design of a road or access road, this study was carried out in the area called Palo Alto neighborhood road in the Daule canton.

[1] Magíster en Docencia Universitaria. Ingeniera en Sistemas Computacionales. Docente de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador.

[2] Magíster en Docencia Universitaria. Ingeniera Civil. Docente de la carrera Ingeniería Civil en la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Guayaquil, Ecuador.
[3] Magíster en Docencia Universitaria e Investigación Educativa. Ingeniero Civil. Docente de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad de Guayaquil, Ecuador.

**KEYWORDS**: Teaching-learning, topographical learning, topographical calculation, trigonometric learning.

Debido a la importancia que tiene el aprendizaje de la trigonometría se la considera como el arte de calcular la información perdida, mediante simples cálculos matemáticos, como, por ejemplo, dar la suficiente información para definir dentro de un triángulo las dimensiones de sus ángulos mediante funciones simples de seno y coseno (Montiel, 2005).

La trigonometría se ha convertido en una poderosa herramienta que ayuda a la topografía a tomar mediciones, tales como calcular las dimensiones del levantamiento de un terreno. Esto es posible gracias a los aparatos modernos denominados estación total, que es un instrumento que realiza la medición de ángulos a partir de marcas realizadas en discos transparentes (CEPRONÍQUEL, 2008).

El aprendizaje de las nociones trigonométricas es solo analizado a través del resultado de una razón trigonométrica, alejándose de la verdadera razón del uso de la trigonometría y sus diferentes aplicaciones en el área de la ingeniería, por lo que la trigonometría es vista en estrecha relación con otras áreas de conocimiento técnico, como lo es la topografía (Mesa y Herbst, 2011).

El estudio del que se deriva el artículo se basa en una aplicación teórico-práctica, mediante el estudio topográfico y diseño geométrico de una carretera, así como el uso de la trigonometría como base fundamental en la construcción de una vía. Es necesario considerar teoría y práctica para la formación integral del individuo, ya que a través de esta conexión es posible que el futuro profesional aprenda a desenvolverse en la acción, es decir, en los acontecimientos cotidianos sobre los cuales actuará una vez finalizada su formación. para.

## Descripción del área de estudio

Como primera fase para realizar el estudio el alumno debe tener claro cuál va a ser su campo de acción para la aplicación de la topografía. Para esta práctica hemos considerado un tramo de camino vecinal ubicado en la provincia del Guayas, que corresponde a los recintos Palo Alto-La candela-Las playas (Figura 1).


Figura 1*: Implantación vía de estudio.*

**Estudio del tránsito actual y futuro**

Como planteamiento académico de la aplicación teórica a problemas reales, se ha considerado la aplicación práctica para el estudio del volumen de tránsito, que debe incluirse en el cálculo topográfico en la construcción de una vía. Al hacer el diseño para mejorar o construir una vía el primer paso es realizar un estudio de trafico basado en datos obtenidos en campo, con la finalidad de identificar el nivel de servicio de la vía y poder calcular y obtener los mejores parámetros reales para su diseño. Los cuales serían los siguientes: Tránsito actual, previsión de tráfico, estimación de los volúmenes a futuro (Montiel y Buendía, 2013).

Los datos obtenidos se resumen en la siguiente tabla:

| ***DÍAS*** | ***VEHÍCULOS LIVIANOS*** | ***BUSES*** | ***CAMIONES*** | ***TOTAL*** | ***Veh/Equiv*** |
|---|---|---|---|---|---|
| | ***AUTOMÓVIL*** | ***2DA*** | ***2DB*** | | |
| *MIÉRCOLES* | *15* | *1* | *0* | *16* | *16.76* |
| *JUEVES* | *15* | *1* | *1* | *17* | *18.78* |
| *VIERNES* | *19* | *0* | *1* | *20* | ***21.02*** |
| *SÁBADO* | *14* | *1* | *1* | *16* | *17.78* |
| *DOMINGO* | *15* | *0* | *1* | *16* | *17.02* |
| ***TOTALES*** | ***78*** | ***3*** | ***4*** | ***85*** | ***92*** |

| PORCENTAJE | 91.76 | 3.53 | 4.71 | 100 |
|---|---|---|---|---|

*Tabla 1: Conteo de tráfico y vehículos equivalentes.*

Con los datos obtenidos del conteo realizamos los cálculos del TPDA (tráfico promedio diario anual), que es el número de vehículos que pasan en uno y otro sentido, en un punto determinado del camino, durante las 24 horas del día.

El TPDA se l obtiene de la siguiente manera:

$$TPDA = \frac{VehEquiv.(Horapico)}{0.12} \; ; \; TPDA = 21.\frac{02}{0}.12 \; ; \quad TPDA = 175 \text{Vehículo}$$

**Velocidad de diseño**

La velocidad es un factor muy importante en todo proyecto, se la elige en función de las condiciones físicas y topográficas del terreno, la importancia del camino, volumen de tránsito y uso de la tierra, para este estudio la velocidad de diseño adoptada es de 80km/h.

| VELOCIDADES DE DISEÑO EN Km/ h | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| CATEGORIA DE LA VIA | T.P.D.A | RELIEVE LLANO | | RELIEVE ONDULADO | | RELIEVE MONTAÑOSO | |
| | | RECOMENDABLE | ABSOLUTO | RECOMENDABLE | ABSOLUTO | RECOMENDABLE | ABSOLUTO |
| R - I o R – II | Más de 8.000 | 120 | 110 | 110 | 90 | 90 | 80 |
| I | De 3.000 a 8.000 | 110 | 100 | 100 | 80 | 80 | 60 |
| II | De 1.000 a 3.000 | 100 | 90 | 90 | 80 | 70 | 50 |
| III | De 300 a 1.000 | 90 | 80 | 80 | 60 | 60 | 40 |
| IV | De 100 a 300 | 80 | 60 | 60 | 35 | 50 | 25 |
| V | Menos de 100 | 60 | 50 | 50 | 35 | 40 | 25 |

*Tabla .2: Velocidades de diseño*

Ya teniendo la velocidad de diseño establecemos también la velocidad de circulación con la siguiente ecuación:

$$Vc = 0.8 * Vd + 6.5$$

$$Vc = 0.8 * 80 + 6.5 = 70.\frac{5km}{h}$$

**Alineamiento horizontal**

El alineamiento horizontal es la proyección del eje del camino en un plano horizontal. Los elementos que integran esta proyección son las tangentes y las curvas, sean circulares o de transición. El polígono o eje de una vía está compuesto por tramos rectos que se denominan tangentes, las cuales tienen un punto común llamado punto de inflexión PI. Las tangentes sucesivas se unen por medio de curvas, que son expresadas por sus radios o el ángulo subentendido por el arco del círculo. Las curvas circulares pueden ser simples, compuestas o inversas. Se debe tener en cuenta que en el trazado de vías para caminos vecinales se usarán exclusivamente curvas circulares simples

**Curvas circulares simples**

Las curvas circulares simples se definen como arcos de circunferencia de un solo radio que son utilizados para unir dos alineamientos rectos de una vía.

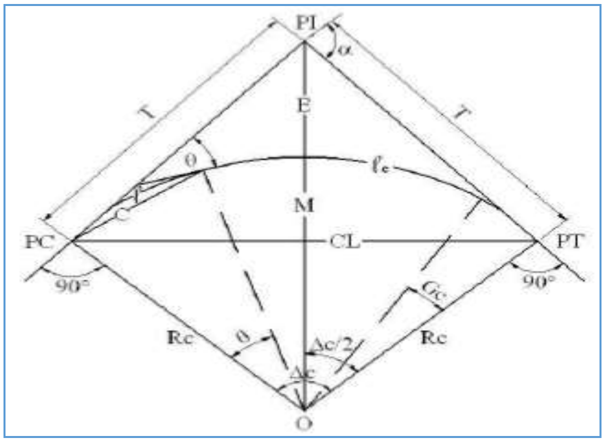


*Figura 2: Elementos de una curva circular simple*

**PI:** Punto de intersección de la prolongación de las tangentes

**PC:** Punto en donde empieza la curva simple

**PT:** Punto en donde termina la curva simple

**α:** Ángulo de deflexión de las tangentes

**ΔC:** Ángulo central de la curva circular

**Ɵ:** Ángulo de deflexión a un punto sobre la curva circular

**Gc:** Grado de curvatura de la curva circular

**RC:** Radio de la curva circular

**T:** Tangente de la curva circular o subtangente

**E:** External

**M:** Ordenada media

**C:** Cuerda

**CL:** Cuerda larga

**L:** Longitud de un arco

**Le:** Longitud de la curva circular

Una curva circular simple (CCS) está compuesta por los siguientes elementos:

**Ángulo de deflexión [Δ]:** El que se forma con la prolongación de uno de los alineamientos rectos y el siguiente. Puede ser a la izquierda o a la derecha según si está medido en sentido antihorario o a favor de las manecillas del reloj, respectivamente. Es igual al ángulo central subtendido por el arco (Δ).

**Tangente [T]:** Distancia desde el punto de intersección de las tangentes (PI) -los alineamientos rectos también se conocen con el nombre de tangentes, si se trata del tramo recto que queda entre dos curvas se le llama entretangencia– hasta cualquiera de los puntos de tangencia de la curva (PC o PT).

$T = R \cdot \tan(\frac{\Delta}{2})$

**Radio [R]:** El de la circunferencia que describe el arco de la curva.

$R = \frac{T}{\tan\frac{\Delta}{2}}$

**Cuerda larga [CL]:** Línea recta que une al punto de tangencia donde comienza la curva (PC) y al punto de tangencia donde termina (PT).

$CL = 2 \cdot R \sin\frac{\Delta}{2}$

**Externa [E]:** Distancia desde el PI al punto medio de la curva sobre el arco.

$E = T \tan\frac{\Delta}{4} E = R(\frac{1}{\cos(\frac{\Delta}{2})} - 1)$

**Ordenada media [M] (o flecha [F]):** Distancia desde el punto medio de la curva hasta el punto medio de la cuerda larga.

$M = R(1 - \cos\frac{\Delta}{2})$

**Grado de curvatura [G]:** Corresponde al ángulo central subtendido por un arco o una cuerda unidad de determinada longitud, establecida como cuerda unidad (c) o arco unidad (s).

$G_c = 2 \arcsin\frac{c}{2R}$

**Longitud de la curva [L]:** Distancia desde el PC hasta el PT recorriendo el arco de la curva, o bien, una poligonal abierta formada por una sucesión de cuerdas rectas de una longitud relativamente corta.

$L_c = \frac{c \cdot \Delta}{G_c}$

**Curvas circulares compuestas**

Las curvas circulares compuestas están formadas por dos o más curvas circulares simples consecutivas, tangentes en un punto en común y con sus centros al mismo lado de la tangente común

**Radio mínimo de curvatura**

El radio mínimo de las curvas horizontales es el valor límite para una velocidad de diseño dada y se determina en base al máximo peralte admisible y al coeficiente de fricción lateral, lo cual posibilita seguridad en el tránsito

El radio mínimo (R) en condiciones de seguridad, puede calcularse según la siguiente fórmula:

$$R = \frac{v2}{127(e+f)}$$

Donde:

R = Radio mínimo de una curva horizontal, metros.

V = Velocidad de diseño, km/h.

f = Coeficiente de fricción lateral = 0.19-0.000626V

e = Peralte de la curva. (Metro por metro ancho de calzada)

| Velocidad de Diseño (kph) | Peralte Máximo e | f máximo | Total e+f | Radio Mínimo Calculado (m) | Radio mínimo Redondeado (m) |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | 0.1 | 0.1650 | 0.265 | 475.412.272 | 50 |
| 50 | 0.1 | 0.1600 | 0.26 | 757.116.899 | 80 |
| 60 | 0.1 | 0.1580 | 0.258 | 109.869.987 | 110 |
| 70 | 0.1 | 0.1462 | 0.2462 | 156.712.742 | 160 |
| 80 | 0.1 | 0.1400 | 0.2400 | 209.973.753 | 210 |
| 90 | 0.1 | 0.1337 | 0.2337 | 272.911.971 | 275 |
| 100 | 0.1 | 0.1274 | 0.2274 | 346.262.786 | 350 |
| 110 | 0.1 | 0.1211 | 0.2211 | 430.916.285 | 435 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 120 | 0.1 | 0.1149 | 0.2149 | 527.621.344 | 530 |

***Tabla 3:*** *Radios mínimos de curvatura*

**Peralte**

Consiste en elevar en las curvas el borde exterior de las vías, para que permita que una componente del vehículo se oponga a la fuerza centrífuga (Fc), evitando de esta manera que el vehículo desvíe radialmente su trayectoria hacia fuera.

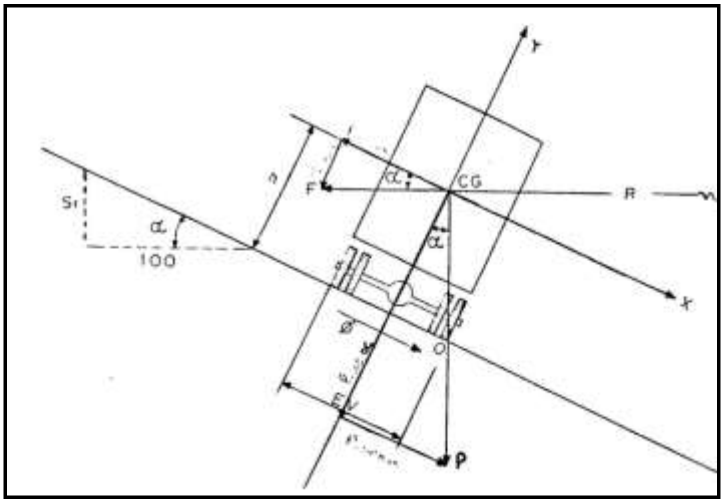


*Figura 3: Elementos y componentes para peralte*

Se calcula la longitud **"L"** de desarrollo del peralte en función de la gradiente de borde **"i",** cuyo valor se obtiene en función de la velocidad de diseño.

$$Lt = \frac{e * a}{2i}$$

**Lt =** longitud de la transición; e = Valor del peralte; a = ancho de la calzada; **i** = gradiente longitudinal.

Para encontrar la longitud de bombeo, podemos establecer la siguiente relación:

$$Lp = \frac{P * a}{2 * i}$$

**Lp =** longitud del bombeo.

Longitud mínima para el desarrollo del peralte, es la que corresponde a la distancia recorrida por un vehículo en el tiempo de dos segundos, a la velocidad de diseño, es decir.

$Lmín = 0.56V$ ; V = Km/h.

$$Lmín = 0.56(80) = 44.8$$

**Tangente intermedia mínima**

Cuando se dan condiciones críticas en el diseño geométrico, es necesario diseñar curvas consecutivas con una tangente mínima entre ellas. Aunque esta solución no es la óptima, permite adaptar el proyecto a las condiciones topográficas de la zona y al trazado de la vía existente. La solución del problema se concreta estableciendo un valor de tangente intermedia que como mínima permita el desarrollo del peralte de las dos curvas consecutivas

| Velocidad km/h | X(m) | | L(m) | |
|---|---|---|---|---|
| | mínimo | ideal | mínimo | ideal |
| Hasta 59 | 10 | 10 | 22 | 37 |
| 60-79 | 10 | 13 | 26 | 46 |
| 80-100 | 16 | 16 | 26 | 55 |

*Tabla 4: Valores de tangente mínima.*

**X =** Longitud necesaria para la primera fase de giro (alabeo), de la cota exterior hasta llegar a la cota del eje.

**L =** Longitud necesaria para la segunda fase de giro, es decir, hasta llegar al peralte previsto en la curva.

Para el cálculo de la tangente intermedia mínima ubicada entre curvas circulares, como es el caso de la vía de nuestro estudio, utilizamos la siguiente ecuación:

$$Lm = \frac{4}{3}L + 2X$$

**Cálculo de área de las secciones transversales de la vía**

Para llevar a cabo el cálculo del movimiento de tierras procedemos a calcular las áreas de las secciones transversales del terreno en cada estación de 20 metros y en todos aquellos puntos intermedios con cambios notables. Los tres siguientes métodos son los más comunes:

**Método del trapecio:** Este método es muy utilizado sobre todo en terrenos llanos, consiste en utilizar la siguiente fórmula, la cual se emplea tanto para excavaciones, como para terraplenes.

$$A = \frac{B + b}{2} \times h$$

Donde:

**A:** Área del trapecio en m2

**B:** Base mayor del trapecio en metros

**b =** Base menor del trapecio en metros

**h =** Altura del trapecio en metros

**Método planímetro:** Este método implica el uso del planímetro; el cual generalmente para facilitar el cálculo de áreas se deben dibujar a la misma escala los ejes verticales y horizontales.

**Método gráfico:** Consiste en dividir la sección de figuras geométricas, ya sean cuadrados, triángulos o trapecios, luego se calcula el área de cada una de las figuras y la sumatoria de todas estas aéreas parciales nos da el área total de la sección.

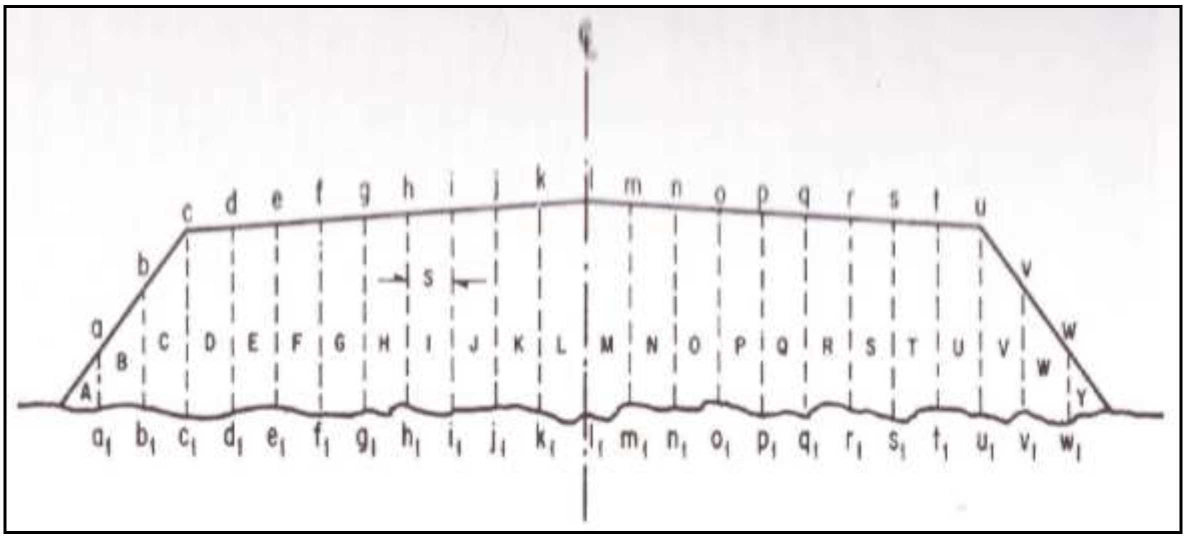


Figura 4: Método gráfico cálculo de Áreas.

Finalmente, el área total será la suma de estas dos expresiones:

$$Ae = \left(a\frac{h1}{2} + \frac{chn}{2}\right) + b\left(\frac{h1}{2} + h2 + h3 + h(n-1) + \frac{hn}{2}\right)$$

**Cálculo de volúmenes**

Una vez que se han calculado las áreas de las secciones transversales, se puede proceder a calcular el volumen correspondiente entre ellas.

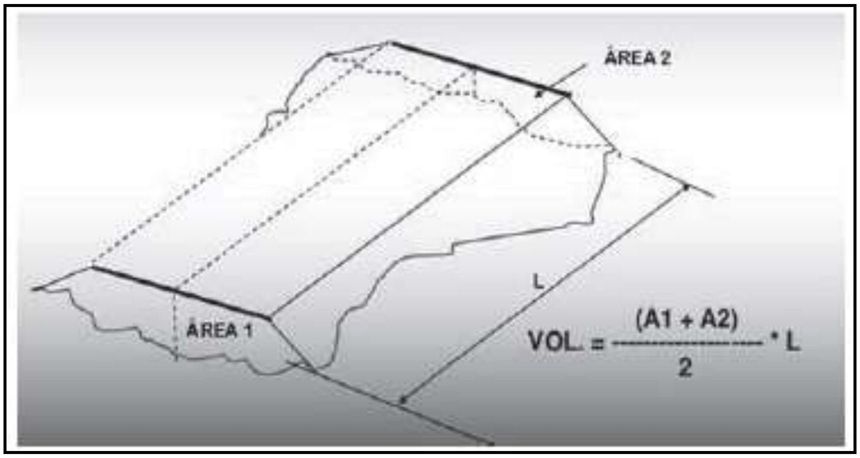


Figura 5: Cálculo de volumen

En el cálculo de los volúmenes para el movimiento de tierra se aplican las siguientes fórmulas:

Cuando se consideran dos secciones iguales, ya sean de corte o de relleno, tendremos que:

VC= (AC1+AC2)* D/2

VR= (AR1+AR2)* D/2

Donde:

**V=** volumen en $m^3$ **AC =** Área de corte; **AR =** Área de relleno; **D=** distancia entre las dos secciones.

Cuando se tenga dos secciones iguales, es decir, una en corte y otra en relleno, será:

**Vc=** D/2 * Ac2 / (Ac+Ar)

**VR=** D/2 * Ar2 / (Ac+Ar)

Donde:

**VR =** Volúmenes de relleno; **Vc =** Volúmenes de corte**; Ac =** Área de corte; **Ar =** Área de relleno; D= distancia entre secciones.

Cuando tenemos un área de corte o de relleno y el área contigua es 0 o viceversa:

**VR=** Ar *D/2

**Vc=** Ac*D/2

Donde:

**VR =** Volúmenes de relleno; **Vc =** Volúmenes de corte**; Ac =** Área de corte**; Ar =** Área de relleno.

Acerca de los objetivos de la educación matemática, específicamente el estudio de la trigonometría y su aplicación a la topografía, podemos señalar que al inicio los alumnos centraron su atención en la mecanización de destrezas básicas y en la utilidad que la matemática enseñada debía tener en la vida cotidiana de ellos. Con respecto a los modelos de evaluación, una vez que se realizó la respectiva práctica en el campo, hubo un consenso total entre los alumnos y la profesora colaboradora acerca de la finalidad de las evaluaciones y su tipo. Todos coincidieron en señalar que la evaluación debía verificar si los saberes académicos institucionalizados basados en el principio de la teoría-práctica habían sido adquiridos de forma óptima

El estudio demostró que hay una fuerte vinculación entre la teoría y la práctica. Esto se manisfestó en la claridad de conceptos adquiridos por los alumnos respecto a la aplicación de la trigonometría en la topografía, gracias al ejercicio práctico que se hizo.

**REFERENCIAS**


CEPRONÍQUEL. (2008). *Manual del operador para los instrumentos de medición Sokkia Set 1X, 2X, 3X y 5X.*

Mesa, V& Herbst, P. (2011). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. ZDM The International *Journal on Mathematics Education*, *43*(1), 41-52.

Montiel, G. (2005), *Estudio socioepistemológico de la función trigonométrica. La visualización de las funciones seno y coseno mediante sus propiedades analíticas*. Inédito.

Montiel, G y Buendía, G. (2013). Desarrollo del pensamiento funcional-trigonométrico. En M. Ferrari, M. Martínez, G., G. Buendía, *Re-significación de funciones para profesores de matemáticas* (pp. 169-205). México, DF: Ediciones Díaz de Santos.