Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

Tratamiento didáctico de las ecuaciones diferenciales ordinarias desde la Matemática

Didactic treatment of ordinary differential equations from Mathematics

Osdeiny Suárez Torres[1] (osuarest@gmail.com) (https://orcid.org/0009-0004-9004-4556)

Ramón Blanco Sánchez [2] (ramonblancord805@gmail.com) (https://orcid.org/0000-0002-5053-281X)

Neel Báez Ureña[3] (neelbaez02@gmail.com) (https://orcid.org/0000-0001-7208-4299)

Resumen

El presente artículo se orienta al perfeccionamiento de un enfoque didáctico del proceso de enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias en las carreras de ingeniería, una herramienta fundamental en el trabajo ingenieril, dado el amplio espectro de aplicaciones en las que se manifiestan. Por lo que su objetivo está encaminado a mejorar la comprensión, proceso de resolución y aplicación de estas ecuaciones, para la determinación de aspectos esenciales para su estudio de modo general. Para el logro del referido objetivo se trabajó desde la Matemática, teniendo en cuenta sus características ontológicas y epistemológicas, así como del proceso de asimilación y habilidades o procesos del pensamiento lógico como generalización y abstracción. El estudio aporta características novedosas para los estudiantes, por primera vez se enfrentan a la resolución de ecuaciones donde la incógnita aparece bajo el signo de derivada y la solución es una función, es una herramienta esencial del lenguaje matemático; a través de ellas se expresan relaciones entre objetos y fenómenos matemáticos de la realidad objetiva, así como descripción y relación entre los diferentes movimientos de las variables que en ellas intervienen.

Palabras clave: enfoque didáctico, motivación, función solución de una EDO, estructura sistémica.

Abstract

This article is oriented to the improvement of a didactic approach to the teaching-learning process of ordinary differential equations in engineering careers, a fundamental tool in engineering work, given the wide spectrum of applications in which they are manifested.Therefore, its objective is aimed at improving the understanding, solving process and application of these equations, in order to determine essential aspects for their study in general.In order to achieve this objective, the work was based on

[1] Máster en ciencias Enseñanza de Matemática Superior. Licenciado en Matemática. Ingeniero Civil. Profesor Instructor. Universidad de Camagüey, Facultad de Construcciones. Cuba.

[2] Doctor en Ciencias Pedagógicas. Licenciado en Matemática. Profesor Titular y Consultante. Universidad de Camagüey, Facultad de Construcciones. Cuba.

[3] Doctor en Ciencias Pedagógicas. Licenciado en Matemática. Profesor Titular. Universidad Autónoma de Santo Domingo. Director de la Escuela de Matemática de la Facultad de Ciencias. República Dominicana.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

mathematics, taking into account its ontological and epistemological characteristics, as well as the process of assimilation and skills or processes of logical thinking such as generalization and abstraction.The study provides novel characteristics for the students, for the first time they face the resolution of equations where the unknown appears under the sign of derivative and the solution is a function, it is an essential tool of mathematical language; through them, relationships between mathematical objects and phenomena of the objective reality are expressed, as well as description and relationship between the different movements of the variables involved in them.

Key words: didactic approach, motivation, solution function of an EDO, systemic structure.

Introducción

Como objeto de la Matemática son consideradas todas las formas y relaciones del mundo real que posean objetivamente tal grado de independencia respecto al contenido, que pueden ser totalmente abstraídas de este último. Además, no solo las formas abstraídas de la realidad son objeto de estudio de la Matemática, sino también, aquellas lógicamente posibles, establecidas sobre la base de formas y relaciones ya conocidas.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática en las ingenierías es necesario que los estudiantes desarrollen habilidades y capacidades matemáticas que contribuyan a la comprensión del contenido matemático y con ello, al avance de las ciencias aplicadas. Uno de los principales objetivos de la Matemática en las carreras de ingeniería es proveer herramientas fundamentales para la modelación y resolución de problemas ingenieriles, pero para el logro de estos objetivos es necesario en su enseñanza, buscar un equilibrio entre fundamentalización y profesionalización de la propia disciplina (Gutiérrez, 2003). En las más variadas situaciones, se debe lograr que los educandos dominen el aparato matemático que los haga capaces de modelar y analizar los procesos técnicos, económicos, productivos y científicos; con la utilización tanto de métodos analíticos como aproximados, así como de las técnicas de computación.

Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) dentro de la Matemática son una herramienta poderosa para modelar y resolver problemas ingenieriles por lo que se requiere desarrollar habilidades en los estudiantes referentes a los procesos de modelación en diferentes contextos; promover el desarrollo del razonamiento conceptual, procesos del pensamiento lógico como análisis y síntesis; dado que muchos problemas ingenieriles se resuelven mediante las EDO, las cuales no siempre se pueden resolver por métodos analíticos. “Organizaciones nacionales e internacionales señalan, que no son suficientes para alcanzar la formación integral de los futuros profesionistas” (Rodríguez y Quiroz, 2016, p. 101) por lo que el empleo de métodos numéricos resulta fundamental en su estudio.

ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

En un ambiente de geometría dinámica Hernández, Jaimes y Chávez (2016) reconocen que a los estudiantes se les dificulta transitar o cambiar de registros de representación: algebraico, gráfico, al lenguaje natural. Camacho, Perdomo y Santos Trigo (2008) observaron que, en líneas generales, la idea que tienen los estudiantes de resolver una ecuación diferencial se reduce a la aplicación de algoritmos específicos de clasificación y resolución de las EDO (Guerrero, Camacho y Mejías, 2010), desaprovechan las potencialidades de estas y, con ello, la contribución a la formación de un ingeniero acorde con las exigencias actuales. Lo que se convierte en un aspecto vital a tratar didácticamente.

La disciplina Matemática contribuye al desarrollo del pensamiento lógico y algorítmico y aporta los fundamentos básicos de un especialista en ciencias técnicas, dado que todo ingeniero considera representaciones técnicas y científicas en términos matemáticos, con los cuales refleja los rasgos cuantitativos y cualitativos de los fenómenos que estudia.

En particular, como aspectos específicos de la contribución de esta disciplina a la formación del futuro ingeniero, se distinguen los siguientes:

- Ampliar la madurez matemática y la capacidad de orientarse a lo esencial del contenido y abstraer las relaciones intrínsecas en el objeto de estudio.
- Desarrollar habilidades para la comunicación y comprensión de propiedades y características matemáticas de magnitudes y formas en las variantes formal, gráfica, numérica y verbal. Lograr dominio de lenguaje matemático.
- Contribuir a la conformación de una cultura científica general e integral actualizada.
- Identificar, interpretar, analizar y formular modelos matemáticos de procesos técnicos, económicos, productivos y científicos vinculados al objeto de su profesión, así como resolver los problemas de índole matemático a los que estos conducen, haciendo un uso eficiente de las técnicas modernas de cómputo y de los Asistentes Matemáticos.
- Construir una sólida base de conocimientos, integrada y sistémica, que deje huella en su proceso de aprendizaje y le permita resolver problemas con los recursos y estrategias estudiadas.
- Aprender a razonar y actuar de forma creadora.

Para ello se requiere una concepción del modelo de enseñanza que tenga en cuenta:

- Una estructuración sistémica de los contenidos (conocimientos, habilidades, actitudes y sentimientos).
- Una enseñanza centrada en el estudiante como sujeto activo, constructor y reconstructor de su propio conocimiento y proceso de aprendizaje.

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

- Una enseñanza a través y para la resolución de problemas, vinculados a la carrera y a las otras disciplinas y asignaturas.
- Una enseñanza fundamentada en las características intrínseca y esenciales de la Matemática que caracterizan su ontología y epistemología. (Rodríguez, 2021).

En la actualidad se cuenta con softwares que son asistentes matemáticos de gran ayuda, tanto desde el punto de vista profesional (el Maple), como desde el punto de vista didáctico con el Geogebra. Es necesario destacar, que software como el Maple tienen implementado métodos analíticos muy eficientes que pueden resolver una gran variedad de EDO, por lo que en la formación del ingeniero resulta muy importante lograr que sea capaz de modelar un problema dado mediante EDO ya que tiene la posibilidad de resolver la ecuación a partir de los referidos software; pero para poder modelar problemas usando dicha herramienta matemática, primero tiene que dominar la herramienta comprendiendo su esencia y características fundamentales. De ahí la importancia del tratamiento didáctico en la motivación por el aprendizaje de las EDO.

Materiales y métodos

El trabajo se ha desarrollado mediante la investigación-acción. Se estudiaron los resultados de 235 evaluaciones sobre el tema, así como entrevistas a docentes con experiencia en la impartición del contenido estudiado. Esto se apoyó, además, con un estudio bibliográfico, tanto de la bibliografía empleada por los estudiantes como de publicaciones actualizadas sobre el tema.

Resultados

Las ecuaciones diferenciales y procesos de resolución. Aproximación al Método de Euler

Una gran variedad de problemas que los ingenieros afrontan se basa en conocer cómo varía un elemento en función de una o varias variables. Es decir, determinar una función desconocida mediante datos relacionados por una ecuación que contiene, por lo menos, una de las derivadas de la función desconocida. Estas ecuaciones se nombran ecuaciones diferenciales. Si la ecuación contiene derivadas respecto a una sola variable independiente, entonces se dice que es una ecuación diferencial ordinaria (EDO).

Sobre estas se ofrece un enfoque didáctico que permite al estudiante analizar la relación entre la función derivada y la función solución que contribuye a mejorar su comprensión, el proceso de su resolución, así como sus aplicaciones en la solución de problemas ingenieriles y de la vida cotidiana. Los procedimientos usados para su resolución pueden producir una solución exacta o aproximada, ya que su buscan encontrar la función o un conjunto de funciones, que están definidas explícita o implícitamente, que no contengan derivadas y que se satisfagan idénticamente. Para elaborar los cálculos numéricos en la obtención de las soluciones se emplean como herramienta muy eficiente los asistentes matemáticos.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Artículo original

Puede afirmarse que este es un método básico y sencillo entre los métodos numéricos para obtener la solución de una ecuación diferencial, aunque existen otros, todos con la misma estructura fundamental; se incluye debido a que permite analizar, detalladamente, el error y su propagación; se debe tener en cuenta también su valor histórico. La utilidad para el concepto es un procedimiento que, aunque es la base de los métodos numéricos permite ver la relación de aproximación de la derivada de una función mediante la razón entre el cambio en el valor de la función y el cambio en el argumento, lo que permite construir una serie de puntos que se acercan al valor de la solución de la ecuación diferencial, la solución en cada punto usando la derivada en ese punto, lo cual contribuye a ilustrar a los estudiantes la solución de una ecuación diferencial.

Como se ha planteado, el algoritmo a emplear se basa en la aproximación del valor de la solución en cada punto por el valor de la tangente a la curva solución en el punto anterior.

Una recta $y = mx + n$ es tangente a una función $f(x)$ en un punto de abscisa $x = a$ cuando pasa por el punto $(a; f(a))$ y su pendiente es $f'(a)$, es decir, el mismo grado de variación, definida por la expresión: $y - f(a) = f'(a) * (x - a)$que se evidencia mediante el uso del Geogebra.

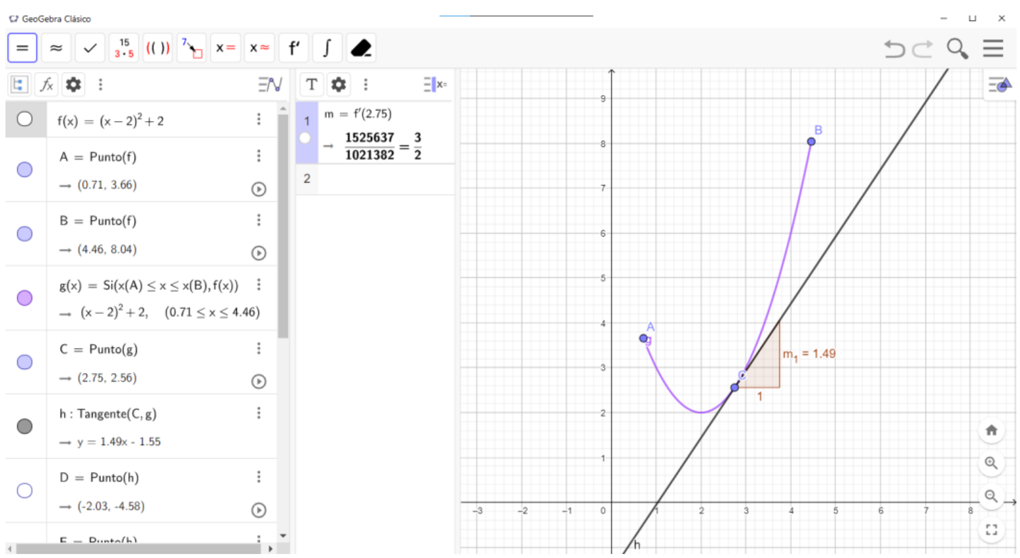


Figura 1. Algoritmo a emplear 1. Fuente: elaboración propia.

Lo que permite entender que al trazar una tangente a la curva en el punto cuya ordenada es (x_i), o sea en en el punto $P_i(x_i; y(x_i))$, tomar otro punto $P_{i+1}(x_{i+1}; y(x_{i+1}))$, y a partir de estos dos puntos hallar la pendiente de la curva $y = y(x)$ en el punto (P_i), dada por $m = f(x_i; y_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$, donde $x_{i+1} = h + x_i$ y $y_{i+1} = y_i + hf(x_i; y_i)$, para un

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

$h = \frac{b-a}{n}$ que es el ancho de los (n) subintervalos iguales en que se divide el intervalo $[a; b]$ donde deseamos encontrar la solución.

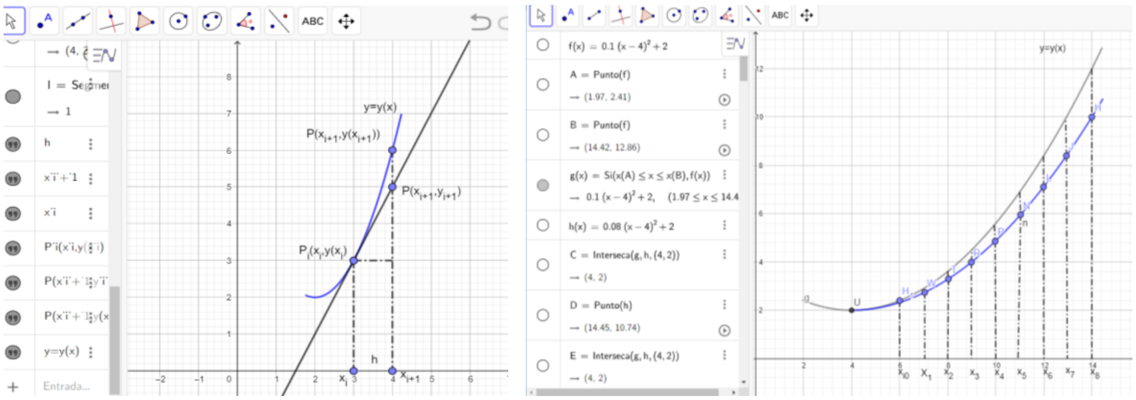


Figura 2. Algoritmo a emplear 2. Fuente: elaboración propia.

Al aproximar la solución por tramos de líneas rectas, estas rectas tienen pendientes iguales a los de la curva en puntos iniciales de cada uno de los subintervalos $[x_i; x_{x+1}]$, en que quedó subdividio el intervalo dado. Sin embargo, apreciamos que en la medida en que nos alejamos del punto inicial se evidencia un error en el intervalo $[a, b]$que va en aumento, el cual queda reducido en la medida que aumente el número de subintervalos en el intervalo ofreciendo una mayor exactitud.

El error que se comete en el paso inicial para (x_0, y_0) es $E_0 = 0$, siempre en E_1se considerará solamente el error por truncamiento local, ya que no hay influencia de errores anteriores.

Se determina el valor aproximado a la solución de la ecuación $y' = y + x$ para $x = 1$ que satisfaga la condición inicial $y_0 = 1$ cuando $x_0 = 1$.

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

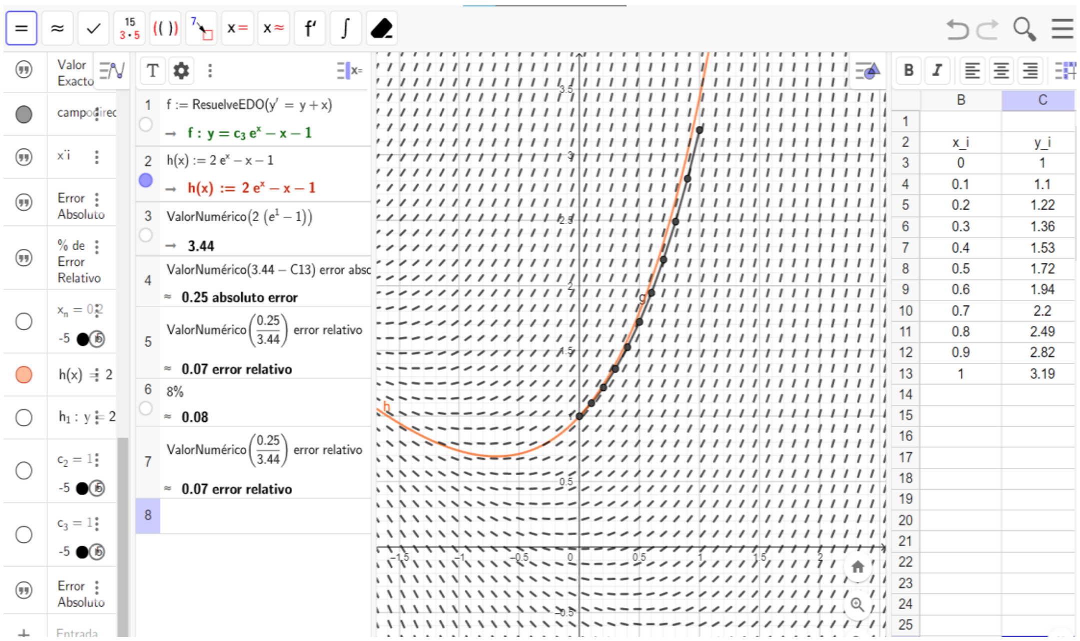


Figura 3. Algoritmo a emplear 3. Fuente: elaboración propia.

A través del método numérico hemos encontrado el valor aproximado $y_{x=1} = 3.19$. La solución precisa al resolver la ecuación dada que satisface las condiciones iniciales indicadas es $y_{x=1} = 2(e-1) = 3.44$ donde se evidencia un error aproximado de solo el 8%.

De forma análoga en la solución de la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 0$ con la condición inicial de $y(o) = 1$ y $y'(0) = 1$, Siendo la solución general $y_G = y_c + y_p$, teniendo como solución característica $(m-1)(m-2) = 0$; $y_c = c_1 e^{1x} + c_2 e^{2x}$. Lo que evidencia la estructura sistémica de la matemática, ya que ella es medio y objeto en sí misma.

Es importante tener presentes varios aspectos:

1- Si $\frac{\partial f}{\partial y}$ es negativa, entonces se puede encontrar un valor de (h) tal que $\left[1 + h\frac{\partial f}{\partial y}\right] < 1$, el error irá disminuyendo.

2- Si $\left[1 + h\frac{\partial f}{\partial y}\right] > 1$, hace que, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sea positiva, entonces el error ira aumentando.

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

En estos casos es posible mantener el error bajo control, seleccionando (h) suficientemente pequeño de forma que $\left[1+h\frac{\partial f}{\partial y}\right]$, llamado factor de programación, se encuentre muy próximo a la unidad.

En caso extremo que $\frac{\partial f}{\partial y}$ sea positiva y el factor de programación sea mayor que la unidad para cualquier valor de (h), el error se incrementará sin límite para valores creciente de la variable independiente. El criterio más importante no es que el error absoluto E_i esté limitado, sino que el error relativo $\frac{E_i}{y_i}$ no aumente apreciablemente.

Tener muy en cuenta la secuencia del algoritmo de cálculo en la determinación de cada valor.

Todo lo planteado por los autores no está encaminado al estudio de las ecuaciones diferenciales, sino en la comprensión e interpretación de sus soluciones, así como la relación entre la función derivada y la función solución, se obtienen estas últimas de forma eficiente. Ello motiva a los estudiantes en las disímiles aplicaciones de las EDO, su utilidad en la vida cotidiana y ventajas que contrae el dominio de las mismas.

Es necesario potenciar en los estudiantes de ingeniería aquellas habilidades que estimulen su capacidad para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura y la forma física. Se trata de que una vez determinada la función desconocida (variable dependiente)(y), conociendo la relación que existe entre esta función y su derivada con respecto a la variable independiente (x), les permita entender y comprenderlo. El estudio del movimiento de los objetos en nuestro universo está dado por la segunda Ley de Newton o principio fundamental de la dinámica, la cual presenta aplicaciones de suma importancia en campos de la ingeniería y se pude describir de diferentes formas mediante la simbología del cálculo, al notar que la aceleración (a) puede expresarse como la primera derivada de la velocidad (v) $(esto\ es, dv/dt)$, o como la segunda derivada de (v) de un desplazamiento (s) $(siendo, d^2s/dt^2)$. $F=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}$.

Lo que nos permite modelar mediante la matemática problemas de la mecánica clásica que involucran los conceptos anteriores, y la solución e interpretación de tales problemas. Como es:

Un cuerpo de masa de (m) parte del reposo y cae verticalmente hacia abajo, bajo la influencia de la gravedad sin presentar fricción con el aire.

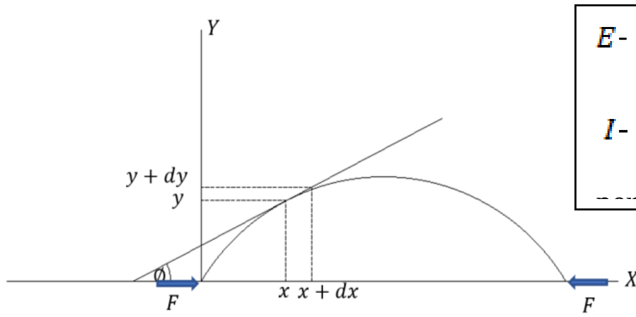
Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

Planteado de forma matemática $\frac{d^2x}{dt^2} = g \;\; x = 0$ y $\frac{dx}{dt} = 0$ en $t = 0$ obtenemos por integración $v = gt + c_1$. Otra integración produce de la anterior ecuación $x = \frac{1}{2}gt^2 + c_2$ Puesto que $x = 0$ en $t = 0$, $c_2 = 0$. Por tanto $x = \frac{1}{2}gt^2$.

Para el análisis del comportamiento (la curva) de una columna elástica sometida a compresión. Teniendo en cuenta que la relación entre el momento flector $M(x)$ y el radio de curvatura $R(x)$ en un punto (x) de la viga viene dada por:

$$M(x) = -\frac{EI}{R(x)}$$



E- Módulo de Young o Elástico.

I- Inercia por donde ocurre la pérdida de estabilidad

Figura 4. Pandeo de una viga sometida a una fuerza axial F de compresión.

Donde inicialmente la curvatura es pequeña, de manera que $\frac{1}{R(x)} \approx y''(x)$. El momento flector $M(x)$ a una distancia (x) del extremo izquierdo de la viga es igual al producto de la fuerza (F) por el brazo de momento (es decir, la ordenada correspondiente):

$$(x) = Fy(x)$$

de manera que, para pandeos pequeños la ecuación a estudiar es:

$$y''(x) + \frac{F}{EI}y(x) = 0, \qquad y(0) = 0 = y(l)$$

que tiene soluciones:

$$y_n(x) = Asen(\lambda_n x), \lambda_n = \frac{n\pi}{l} = \sqrt{\frac{F_n}{EI}}, n = 1,2,3, \ldots.$$

ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

Los autovalores (λ_n) (cargas críticas) y (y_n) (modos de desviación) expresan que solo cuando la fuerza de compresión viene dada por uno de los valores $F_n = \frac{\pi^2 EI}{l^2} n^2, n = 1,2,3, \ldots.$ la columna se desvía.

La curva de deflexión $y(x)$ corresponde a la mínima carga crítica, es $y_1(x) = Asen(\pi x/l)$, que se conoce como primer modo de desviación. Las curvas de deflexión correspondientes a cargas superiores F_n, $n = 2,3, \ldots$ se corresponden con modos de desviación donde la viga tiene algún tipo de restricción física $x_n = \frac{L}{n}$.

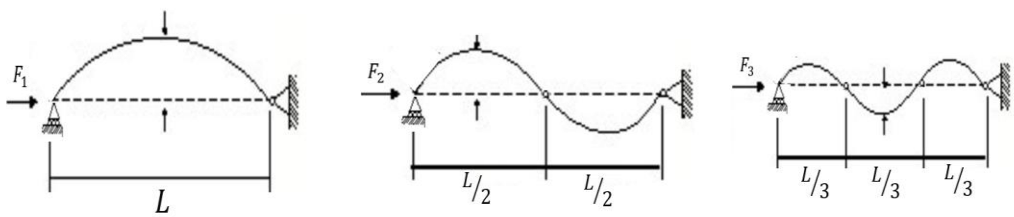


Figura 5. Modos de desviación para cargas criticas F_1; F_2 y F_3. Fuente: elaboración propia.

Cuando se tienen curvaturas (k) de cualquier tamaño. Donde se determina $k = \frac{1}{R(x)} = \frac{d\emptyset}{ds}$, con (ds) un diferencial de arco de curva y $\emptyset = \arctan(y'(x))$. Al derivar de nuevo con respecto a (s) la ecuación anterior teniendo en cuenta que $dy/ds = sen\,\emptyset$. Nos permite obtener la ecuación diferencial de la curva elástica: $\frac{d^2\emptyset}{ds^2} = -\frac{F}{EI} sen\emptyset$.

Los ejemplos descritos reflejan una breve pero innegable aplicación y utilidad de estas ecuaciones, solución y relación con su función derivada.

En función del objetivo que se persigue por los autores, basado en la comprensión e interpretación de las soluciones de las ED, así como la relación entre la función derivada y la función solución, ya tratado y expresado. Como forma de evidenciar su importancia, al analizar su comportamiento en la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas por el método de los coeficientes indeterminados.

Para hallar la solución general de la ED lineal de orden (n) con coeficientes constantes $\emptyset(D)y = f(x)$ es necesario obtener, de acuerdo con el teorema fundamental, la solución general de la ecuación homogénea asociada (ecuación complementaria) $\emptyset(D)y = 0$, pero no es suficiente, es necesario hallar una solución particular de la ecuación no homogénea $\emptyset(D)y = f(x)$. Teniendo en cuenta el precepto que la solución de una

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

ecuación de cualquiera tipo es la variable o función que sustituida en la ecuación la convierte en una identidad, se propone una solución particular (y_p) de la ED. $\emptyset(D)y = f(x)$, con coeficientes desconocidos, los que se determinan sustituyendo la (y_p) supuesta en la ED y encontrando para qué valores de los coeficientes la ED se convierte en una identidad.

Para hallar la (y_p) lo primero es determinar qué forma debe tener para poder hacer una suposición correcta de la misma. Por ejemplo, si tenemos la ecuación $y'' - y = 6e^{2x}$. La función a proponer y su segunda derivada deben contener expresiones de la forma (ae^{2x}) e $y_p = ae^{2x}$ para determinar el valor de (a) y convertir en una identidad. Donde $y_p' = 2ae^{2x}$; $y_p'' = 4ae^{2x}$, al igualar los coeficientes una vez sustituidos en la ecuación original se obtiene que $a = 2$; por lo que la solución general es $(y_G = y_C + y_p)$ es $y_G = C_1e^x + C_2e^{-x} + 2e^{2x}$. Lo que evidencia que la solución particular (y_p) está relacionada con la forma de la función $f(x)$ de su ED.

Si $f(x)$ contiene polinomios, términos de la forma $senpx, cospx, e^{px}$donde (p) es constante o combinaciones de sumas o productos de ellas, es posible aplicar el método y la elección de (y_p) se puede formar derivando $f(x)$ sucesivamente y tomando todos los términos de forma esencialmente diferente, ‘multiplicados por una constante indeterminada y sumándolos. Lo que manifiesta la importancia de dominar y tener en cuenta el concepto de solución de una ecuación.

Discusión

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática de los estudiantes de ingeniería, el tratamiento a las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) siempre ha sido un reto para los profesores, por las características del contenido y del estudiante, para el cual el aumento de sus posibilidades cognoscitivas no es consecuencia de un proceso espontáneo, sino de la asimilación de conocimientos y de la formación de capacidades, habilidades y hábitos que tienen lugar en el transcurso de este proceso.

Aunque existe bibliografía que referencia procedimientos y trabajos de cómo orientar el desempeño con las representaciones de objetos matemáticos, estas resultan insuficientes y no se ha logrado que cumplan su función, lo que hace permanentes las dificultades en la representación semiótica de las relaciones de y entre los objetos matemáticos. Ello evidencia en la práctica diaria que los alumnos presentan una serie de deficiencias al respecto, que limitan sus resultados y, con ello, el trabajo con las

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

EDO. Esto los aleja de la formación profesional que exige la ciencia y la tecnología, así como, de los roles a los que están llamados a desempeñar hoy los egresados de nuestras universidades (Trigueros, 2014).

Algunos de los objetivos generales que se persiguen con la introducción de las TIC en la educación (Sampedro, 2012) son:

- Desarrollar capacidades en los alumnos para incorporarse eventualmente a puestos de trabajo informatizados. En este sentido la computadora es considerada como un objeto de estudio, y ella misma es usada como un medio para lograr el aprendizaje de su funcionamiento y aplicación a diferentes actividades ligadas a las esferas productivas y de servicios.
- Desarrollar y aplicar herramientas educacionales soportadas en las TIC, encaminadas a transformar y perfeccionar los procesos asociados a la labor de los centros educativos o de formación. De acuerdo a este enfoque, la computadora es vista como un medio de apoyo a la enseñanza y al aprendizaje, no solamente de la Computación y la Informática, sino de otras muy diversas disciplinas.

Actualmente las computadoras personales son las herramientas tecnológicas más usadas para contribuir al aprendizaje, así como las redes de comunicación. Un estudio realizado revela cómo mejora el aprendizaje de los estudiantes que utilizan la TIC como medio para propiciar su aprendizaje (QS-Media.2004). Los niveles de retención y de actividad cognoscitiva son directamente proporcionales entre sí.

Asistente matemático (Geogebra) en la Educación Superior

Los asistentes matemáticos ofrecen posibilidades educativas para la enseñanza de las ciencias básicas, entre las que se encuentra la Matemática. Dado el carácter no ostensivo de los objetos matemáticos (Báez y Blanco, 2022), a los cuales se accede mediante sus representaciones semióticas, la apropiación conceptual está asociada a que los estudiantes puedan apreciar el objeto matemático en diferentes representaciones (Duval, 2006), por lo cual los asistentes matemáticos resultan de gran utilidad para efectuar cambios de representación semiótica.

Entre estos asistentes se encuentra el Geogebra que es una herramienta experimental y auxiliar de fácil entorno y sencilla de manejar, con un ambiente gráfico de gran calidad para la representación de objetos matemáticos. Al mismo tiempo, la simplificación de las tareas frecuentes, su interactividad, dinamismo y el contexto de trabajo colaborativo que brinda, son algunas de las ideas que deben centrar el desarrollo de esta propuesta.

El uso del Geogebra permite que se le proporcione este tipo de aprendizaje a los estudiantes, ya que su uso en la ejecución de tareas no esenciales, lo dota de una autonomía que le impide tener una excesiva dependencia del sistema, así como centrar sus esfuerzos en procesos de pensamientos más generales y abstractos, lo que potencia su creatividad y capacidad de razonamiento.

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

El Geogebra es uno de los asistentes más difundidos para la enseñanza de las matemáticas. Por tal motivo y por determinados criterios del autor y otros investigadores ya mencionados y que serán descritos a continuación se ha elegido este programa y no otro:

- Su facilidad de aprendizaje.
- La sencillez de su entorno.
- Su potencia y efectividad de cálculo.
- Su portabilidad.
- Por los “ambientes de enseñanza” y de “colaboración” que pueden suscitar en el aula.
- Por los “tipos de tareas” que pueden desarrollar los alumnos.

Todo lo antes planteado, permite como ya se había dicho anteriormente, la elección de este asistente producto de que ofrece mayor número de garantías en correspondencia con los objetivos educativos y las características de la enseñanza de esta ciencia básica.

Conclusiones

El asistente matemático Geogebra se perfila como una herramienta en la enseñanza de la Matemática capaz de provocar los cauces que permitan organizar la actividad del alumnado, circunstancia que configura los elementos centrales de las cuestiones objeto del presente artículo.

Los resultados alcanzados sientan las bases para el estudio del tema de modo general, teniendo en cuenta características del proceso de asimilación y habilidades o procesos del pensamiento lógico como generalización y abstracción, motivan a los estudiantes en sus disímiles aplicaciones en la vida cotidiana y ventajas que contrae el dominio de las mismas; mediante la comprensión e interpretación de sus soluciones, así como la relación entre la función derivada y la función solución, obtenidas estas últimas de forma eficiente.

Dado los estudios realizados sobre los procesos de abstracción y generalización, así como el análisis del resultado de 235 evaluaciones de los estudiantes sobre el tema abordado, se recomienda la materialización de la solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la aplicación del método de Euler y la resolución de problemas sencillos de variación instantánea con el objetivo de que los estudiantes puedan interiorizar qué es la solución de una ecuación diferencial, ya que estas soluciones son diferentes a las soluciones de los problemas que han trabajado antes de enfrentar las ecuaciones diferenciales.

Osdeiny Suárez Torres
Ramón Blanco Sánchez
Neel Báez Ureña

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

Referencias

Báez, N. y Blanco, R. (2022). What the Teacher Must Master to Direct the Learning Process. *Science Research, 10*(4), 99-107. https://doi.org/10.11648/j.sr.20221004.12

Camacho, M., Perdomo, J.; y Santos Trigo, M. (4 al 7 de septiembre de 2008). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M.ª T. González (eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación del XI Simposio de la SEIEM* (pp. 87-106). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Duval, R. (2006). Quell es sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (Número Especial), 45-81. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509904

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejías, H. R. (2010). *Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema*. https://www.researchgate.net/publication/49113805

Gutiérrez, M. (2003). *Metodología del diseño curricular desarrollador del Ciclo Básico de las carreras de ingeniería.* [Tesis doctoral no publicada, Universidad de Camagüey, Matemática, Camagüey].

Hernández, C., Jaimes, L. A. y Chaves, R. F. (2016). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas. *Mundo Fesc,* 6(11), 7-15. https://www.fesc.edu.co/Revistas/OJS/index.php/mundofesc/article/view/77

Rodríguez, E. (2021). *La formación matemática en el ingeniero: diseño curricular y didáctica.* Centro de Estudios de Matemáticas para Ciencias Técnicas, CEMAT Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cujae. La Habana, Cuba. https://www.researchgate.net/publication/354010500

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 16 Número: 1 Año: 2024
Recepción: 21/05/2023 Aprobado: 01/11/2023 Artículo original

Rodríguez, G. R. y Quiroz, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 99-124. https://www.relime.org/index.php/relime/article/view/148

Sampedro, R. (2012). *Sistema de tareas para el desarrollo del proceso docente educativo. UC.* https://www.monografias.com/trabajos93

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática,* marzo, 207-226. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854011

Conflicto de intereses: Los autores declaran no tener conflictos de intereses.

Contribución de los autores: Los autores participaron en la búsqueda y análisis de la información para el artículo, así como en su diseño y redacción.