Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074

Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

Definición gráfica del límite de una función, aporte a su formalidad como didáctica geométrica

Graphical definition of the limit of a function, contribution to its formality as geometric didactics

Alberto Antonio Tirado Sanabria[1] (alberto.tirados@ug.edu.ec) (https://orcid.org/0000-0003-4641-8931)

Resumen

El límite de una función es un concepto rechazado por el estudiantado que inicia en estudios universitarios, su definición formal actual es un algoritmo algebraico de nociones topológicas con las famosas: Delta y Épsilon, que suelen ser obviadas en los discursos docentes, e incluso quitados de los programas por considerar, que son contenidos muy abstractos para las nobeles mentes de la primera matemática universitaria. De hecho, algunas investigaciones realizadas sobre la acción docente demuestran que estos profesionales desconocen la definición castellana del límite y su educación se centra en el formalismo de su definición y en la resolución de algunos problemas. En este artículo se expone la definición formal explicada geométrica y analíticamente, donde se explica él porque ocurren varias soluciones, con desarrollo inédito en funciones trascendentes. El trabajo propone nuevos teoremas y una propuesta académica al programa de la Matemática I.

Palabras claves: definición gráfica del límite, función, geometría.

Abstract

The limit of a function is a concept rejected by students starting university studies, its current formal definition is an algebraic algorithm of topological notions with the famous: Delta and Epsilon, which are usually ignored in the teaching discourse, and even removed from the programs, considering that they are very abstract contents for the noble minds of the first university mathematicians. In fact, some research on teaching shows that these professionals do not know the Spanish definition of the limit and their education is centered on the formalism of its definition and on the resolution of some problems. In this article the formal definition is explained geometrically and analytically, where it is explained why several solutions occur, with unpublished development in transcendent functions. The work proposes new theorems and an academic proposal to the Mathematics I program.

Key words: Graphic definition of the limit.

El límite de una función. Generalidades

El límite de una función es una imagen o una tendencia a una imagen, existente o no; cuando se realiza un acercamiento infinitesimal a un punto o tendencia determinada, en

[1] Doctor en Educación. Profesor en la Universidad de Guayaquil. Director de un FCI 2021. Guayaquil. Ecuador.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

el dominio. Es decir, la idea real e intuitiva del límite de una función, no es más que la tendencia o la aproximación de su imagen a un valor real, indeterminado o indefinido para puntos específicos o tendencias de su dominio.

La simbología para el límite de una función cuando se tiende a un valor "a", por ambos lados, con el resultado de la imagen o tendencia a una imagen como valor "b", se escribe como: $\lim_{x \to a} f(x) = b$. La tendencia "a" por la izquierda es: $x \to a^-$, y por la derecha: $x \to a^+$. (Baldor 2017).[2]

Ya aquí en dos cortos párrafos es evidente la necesidad de "ver" qué es el límite de una función, que viene a ser la noción existencial del método: "Gráfica de Relaciones". A continuación, se ilustra una función cociente clásica apoyada en la noción tabular con ensayos en su ecuación, que se confirma con lo observado para precisamente mostrar qué es el límite de una función.

Estudie la gráfica de la función: h(x) = x / (x – 2), en los puntos: x = 2, x = 0 y tendencias a ±∞. Donde el numerador está formado por la función primaria f(x) = x, con el denominador como la función g(x) = x – 2. Gráfica de la función h(x). Figura 1

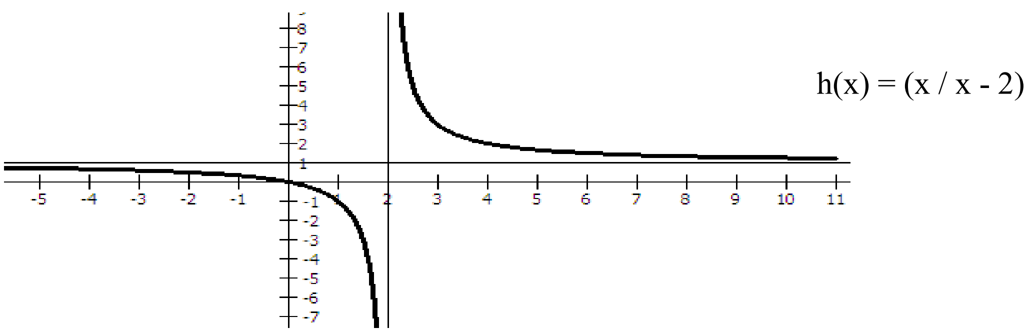

Figura 1. Gráfica de la función cociente: h(x) = x/(x - 2).

Importante hay que destacar en la gráfica los siguientes aspectos:

a) Cuando x tiende a cero, por ambos lados, la imagen es cero. Es decir, el punto (0, 0) es parte de la gráfica de la función cociente.
b) Cuando x tiende a 2 por la izquierda, (esto es $x \to 2^-$), la función tiende a valores muy grandes negativos o tendencia al menos infinito.
c) Cuando x tiende a 2 por la derecha, (esto es $x \to 2^+$), la función tiende a valores muy grandes positivos o tendencia al más infinito. Se puede afirmar que la recta vertical x = 2, es una asíntota vertical y no pertenece al dominio de h(x).

[2] La noción del límite se sabe que era manejada y conocida por las escuelas griegas. En términos modernos se les reconocen a los genios: Newton y Leibniz, quienes lo trabajaron en determinados problemas. A este último se le atribuye la simbología actual, con modificaciones realizadas sucesivamente por los matemáticos: Cauchy y Weierstrass, 100 y 200 años después, respectivamente.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

d) Cuando x tiende al infinito positivo, la función h(x) tiende a la recta horizontal: y = 1 acercándose por encima; y cuando x tiende al infinito negativo, la función h(x) tiende a esta misma recta horizontal, acercándose por debajo. Entonces la recta horizontal y = 1 es una asíntota horizontal, y no pertenece al rango.

e) Todas las tendencias de la función se conservan, es decir no hay "cambios" de tendencias y la función se denomina: "Monótona". Todos estos aspectos en la tabla (1).

Tabla (1) Valores de las imágenes o tendencias de: y = x/(x - 2)

"x"	h(x)	"x"	h(x)	"x"	h(x)
1,9	-19	2,001	2.010	-100	0,9804
1,99	-199	$\lim_{x \to 2} f(x)$	± ∞	-1.000	0,998
1,999	-1.999	100	1,0204	-10.000	0,9998
2,1	21	1.000	1,002	$\lim_{x \to \infty} f(x)$	**1**
2,01	210	10.000	1,0002		

Se confirma que el límite es una imagen o tendencia a esta, entonces así debe ser enseñado y definido en la apertura de su unidad, desde los llamados límites definidos con tendencias en puntos e imágenes reales, que pueden por acercamiento infinitesimal ser demostrados tabularmente. Según Tirado (2020): "Noción tabular del límite, es una herramienta que puede ser usada para resolver todo tipo de límite, inclusive los indeterminados" (p. 75).

1) Con este ejemplo su gráfica y tabla, se muestra la noción del "Límite de una función", donde sus temas deben iniciar, como estrategia a descubrir primero su singular belleza y facilidad para evitar el rechazo actual; es decir, con un orden de la unidad propuesto como:

a) El límite definido, en funciones continuas para entender el manejo de la aproximación y la tendencia infinitesimal, lateral o por un solo lado, por ecuación y tablas.

b) El límite infinito (llamado y aceptado como la indefinición denominada: asíntota vertical), como aplicación y solución de estos límites en funciones cocientes, cuando solo se anula el denominador.

c) Límite al infinito, asíntotas horizontales y oblicuas con sus estrategias de resolución. El lector debe considerar que hoy en día, existen también las asíntotas curvas con su resolución analítica, como aplicación del estudio del límite al infinito.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

Solo después de dominar y conocer sus nociones: gráfica, analítica y tabular, en funciones algebraicas y transcendentes, es que se debe entrar en la temática de:

d) Límite por definición, en sus diferentes modalidades: demostración formal, analítica y gráfica, o en términos de comparaciones delta épsilon, para valores ínfimos dados.

e) Los límites indeterminados, en sus diferentes modalidades como resultados no reales; es decir, que no pertenecen al dominio de la función. De hecho, el límite por definición también se puede aplicar sobre funciones cocientes y transcendentes. Donde el estudiantado tiende a confundir estas definiciones propias de la función cociente, además de buscar siempre soluciones del tipo algebraica algorítmica; "como dificultad epistemológica" (Hernández, Prada, y Ramírez, 2017, p. 82).

En esa secuencia y retomando el título de esta investigación, se entra en la llamada definición analítica o formal del límite, esto es:

La existencia de un valor "ε" (épsilon) ínfimo positivo en torno a "b" o valor dado a la imagen de la función en el punto: f(a) = b; tal que exista un valor "δ" (delta) en torno de "a" relacionado con "ε". (Con delta y épsilon positivos, tan ínfimos como se pueda).

En términos algebraicos esto es: $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Sí y solo si: $a - \delta < x < a + \delta$.

Es decir: $|f(x) - b| < \varepsilon$. Siempre y cuando se cumpla o exista: $|x - a| < \delta$. Cuando $x \to a$.

Entonces el procedimiento actual, para demostrar la existencia del límite de f(x) en el punto "a" del dominio es: "Encontrar una relación real entre épsilon y delta, transformando (f(x) – b) en un valor mayor o igual en términos numéricos en la expresión (x – a). Para ilustrar esto, observe la figura 2, donde la imagen de x = 3, es 3. O sea, f(3) = 3.

Entonces si escogemos una aproximación menor como x = 3,1 significa que de pronto la imagen de esa figura tipo función sea 3,2. Entonces debe existir una relación en términos de números reales entre delta y épsilon, extraída de: $|f(x) - 3{,}2| < \varepsilon$ con $|3{,}1 - 3| < \delta$.

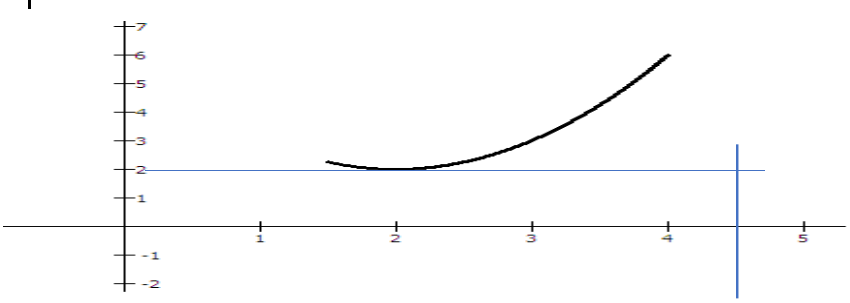

Figura 2. Gráfica ilustrativa del límite de esa curva como: $\lim_{x \to 3} f(x) = 3$).

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

Dos ejemplos analíticos, en funciones algebraicas:

Ejemplo 1: Demuestre que existe el límite de la función y = 2x igual a 2, cuando x → 1, esto es: Demuestre que se cumple: $\lim_{x \to 1}(2x) = 2$.

Por la definición: $|2x - 2| < \varepsilon$. Siempre y cuando $|x - 1| < \delta$.

La transformación de $|2x - 2|$ en $|x - 1|$ resulta sencilla, en términos numéricos: $2|x - 1|$. Entonces se demuestra el límite de la función porque existe la relación real, entre épsilon y delta como: $\delta = \varepsilon/2$. Como solución única.

Ejemplo 2: Demuestre que existe el límite de la función $y = x^2$, igual a 4, cuando x → 2, esto es demuestre que se cumple que: $\lim_{x \to 2}(x^2) = 4$

Por la definición: $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Si y solo si $|x - 2| < \delta$.

La transformación de $|x^2 - 4|$ en $|x - 2|$ no resulta en términos numéricos, quedando como: $|(x - 2)|.|(x + 2)|$, es decir se debe transformar el termino (x + 2) en un valor superior que lo represente; para ello y observando la tendencia x → 2 construimos lo siguiente a partir de la relación de delta: $a - \delta < x < a + \delta$ Es decir: $2 - 1 < x < 2 + 1$ o $2 - 0{,}5 < x < 2 + 0{,}5$

“Dependiendo del valor de δ que se quiera tomar o que se pueda tomar, 1 o 0,5 u otro”. Porque aquí, se tomaron los valores de 1 y 0,5 pero puede tomarse cualquier número real positivo del intervalo: (0, 1], que permita la relación delta épsilon, y que pertenezca al dominio de la función. Es decir que tenga imagen real. Lo que conduce a afirmar que puede existir una infinidad de relaciones delta épsilon, que demuestren el límite.

La primera relación permite la expresión ofrece: $3 < x + 2 < 5$ que es: $3 < |x + 2| < 5$.

Entonces se demuestra el límite de la función porque existe la relación entre épsilon y delta como: $\delta = \varepsilon/5$. Proveniente de la relación: $|(x - 2)|.|(x + 2)| < 5|x - 2| < \varepsilon$. Tomándose el valor “5” como por ser mayor o más “exigente” que la función: $|(x + 2)|$. Aunque muy interesante resulta el hecho de que, el valor de delta en la unidad es el más comúnmente utilizado, contradiciendo su definición de existencia como valor ínfimo.

La segunda relación de “x” para un intervalo, permite la expresión: $3{,}5 < x + 2 < 4{,}5$ que es: $3{,}5 < |x + 2| < 4{,}5$. Que demuestra el límite como: $\delta = \varepsilon/4{,}5$.

Esto significa que la relación delta épsilon, reduce el denominador de este último en relación con el valor delta asumido para generar el número que sustituye la función. Es decir, en este ejemplo para un $\delta = 0{,}1$. La relación que demuestra el límite es $\delta = \varepsilon/4{,}1$.

Estudio de textos para ejemplos actuales

En esta parte de la investigación se hace un recorrido bibliográfico en textos conocidos vigentes de Cálculo diferencial, con los contenidos de la Matemática I, o primera

Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

matemática universitaria, para estadísticamente detallar la tendencia educativa en la definición del límite de funciones. Debe recordarse que la idea además de demostrar la existencia del límite es realizar una propuesta educativa en pro de evitar el natural rechazo al estudio de la unidad de límites.

Tirado (2020) alude "Porque en la actualidad, estadísticas en diferentes latitudes del planeta la señalan como la asignatura con mayores índices de reprobados, menor nota promedio de aprobados, con el mayor abandono en el mundo universitario" (p. 2). Donde en adicional suma también como característica poco estudiada el porcentaje de abandono, cuando se compara la asistencia entre las últimas evaluaciones con respecto a las primeras.

A continuación, autores consultados, año de la obra, seguido del título, luego el tema del capítulo con su página, y su contenido en ejemplos realizados de la definición del límite.

- Hernández (2016). Revista digital de matemáticas, definición formal de límite (p. 14): 2 ejemplos de funciones algebraicas en el primer cuadrante, con valores de épsilon dados.
- Edwar/Penney (2015). Cálculo con geometría analítica. Segunda edición, definición formal de límite (p. 154): 6 ejemplos de funciones algebraicas en el primer cuadrante, con el desarrollo de 3 lemas y 3 teoremas sobre el algebra del límite. El texto incluye una definición de límite al infinito[3].
- Zill/Wright (2011). Cálculo de una variable. Cuarta edición (pp. 103-108): 6 ejemplos en polinomios algebraicos, y solo una función cociente.
- Larson (2010). Cálculo, 9NA, definición formal del límite (p. 52): 3 ejemplos en funciones rectas y cuadráticas, en un caso dado un valor épsilon; algunos teoremas del algebra del límite con la afirmación de la relación de una recta.
- Thomas (2006). Calculo, una variable. 11va edición (pp. 91-98): 7 ejemplos algebraicos y con delta épsilon dados.

En resumen, los ejemplos usados en muchos textos como generalidad, para el tema del límite por su definición, se ubican en ejercicios en funciones algebraicas del primer cuadrante, (la tendencia para un "a" positivo, con "cambios" para hacer cumplir la relación delta épsilon solo en polinomios, que incluyen grado negativo y fracción), en pocos casos se trabajan funciones transcendentes trigonométricas básicas solo para épsilon dados, donde comúnmente se usan estrategias algebraicas no vistas ni teorizadas aún.

Otro aspecto observado en estas literaturas y en otras estudiadas, es la tendencia a desaparecer el capítulo de funciones cuando se fusiona con el de límite, donde en si el

[3] En este trabajo no se desarrolla por definición, los límites infinitos y al infinito. Pendiente por realizar esta posible familia de límites de una función, en lo que podría denominarse teorema fundamental del límite.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

contenido estudiado de las funciones no explica la completitud de las relaciones del plano, algunas características sobre sus "movimientos" y "condicionantes" al rango, así como el origen de sus gráficas. O sea, el apoyo gráfico que se usa a veces como definición y apoyo a resultados realizados, nunca se explica cómo se hace, y por lo general no hay orden de dificultad en los ejemplos ni en las gráficas de funciones, como crítica constructiva general.

En adicional se sigue alimentado la idea del poder de la matemática al contar como ciencia formal, por contener "objetos calculables" en una representación verificable y algorítmica, donde su inteligencia busca visualizar para reducir y generalizar. Artigue (2006), conceptualización que en contrario viene en perjuicio de la esencia de la matemática como ciencia intuitiva en su origen geométrico, en vista que queda reducida por lo calculista a una memorización.

Procedimiento geométrico

Los ejemplos 1 y 2 desarrollados permiten el siguiente procedimiento bajo la utilidad del método "Grafica de relaciones", para la demostración del límite, como una herramienta visual, sencilla y directa para conseguir resultados en la transformación necesaria de la relación: Delta- épsilon. Pasos:

1) Se gráfica la función: $g(x) = |f(x) - b|$, detallando el punto en el dominio a donde se desea demostrar la existencia del límite.
2) Se gráfica una recta inclinada "L_1", que pase por el punto "a" visualmente superior o mayor, (por encima), a cualquiera de las ramas de la función alrededor del punto "a" de preferencia en un corte con la ordenada entero; es decir, de tal forma que su valor absoluto sea mayor en ambos lados a la función g(x) definida en (1). Para todo valor alrededor de "a" en el dominio, se cumpla la "Definición Grafica" $|L_1| > |f(x) - b|$.
3) A la recta L_1 buscada entre posibles, se le calcula su ecuación punto pendiente quedando expresada como $y = m(x - a)$[4].

Esta expresión permite la relación numérica de la definición del límite como

$|f(x) - b| < m|x - a| \rightarrow \varepsilon = m.\ \delta$. Usada en expresión delta-épsilon como: ($\delta = \varepsilon/m$), que demuestra la existencia del límite en el punto del dominio "a", de f(x).

A continuación, se realiza el procedimiento geométrico en los ejemplos 1 y 2

Ejemplo 2, se grafica la función $g(x) = |2x - 2|$, en negrita, ampliada en el punto 1 de la tendencia, junto a la gráfica de una recta mayor que pase por el punto (0, 3) tomado

[4] La letra "m" se usa para denotar la pendiente de la recta, aunque más común es la letra "a" para esto, pero como la definición del límite usa esta letra en su simbología, para el punto de estudio donde se tiende, es que se usara aquí la "m". Situación similar para la letra "b" usada comúnmente como corte de la recta con el eje vertical. A igual que el resultado en el símbolo del límite, en literaturas usa la letra "L". $\lim_{x \to a} (fx) = L$.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

superior al corte de g(x) que toca la ordenada en el (1, 0). Por estos puntos del plano pasa solo la recta $L_1 = -3(x - 1)$ cuyo valor absoluto se grafica en azul (Ver figura 3).

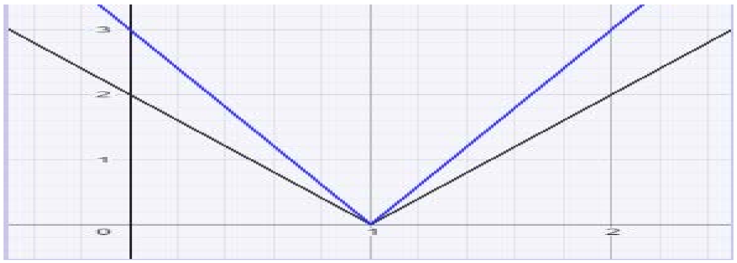

Figura 3, (Gráfica de $g(x) = |2x - 2|$, $L_1 = |3(x - 1)|$, para demostrar: $\lim_{x \to 1}(2x) = 2$)

La recta L_1 como: $3|x - 1| < \varepsilon$, "Mayor" a g(x), demuestra el límite, con: $\delta = \varepsilon/3$.

Ejemplo 2, en donde se observa la gráfica de $g(x) = |x^2 - 4|$, en verde, detallada en el punto "a = 2" con la gráfica de $|L_1|$. Que pasa por los puntos: (2, 0) y (10, 0); este último escogido visualmente, superior. Con ecuación de la recta calculada como: $L_1 = 5x - 10$; graficada su valor absoluto en rojo, ver figura 3 detallada en el punto (2, 0).

Figura 4, (Gráfica de $g(x) = |x^2 - 4|$, $L_1 = |5x - 10|$, para demostrar $\lim_{x \to 2}(x^2) = 4$)

La recta L_1 como: $5|x - 2| < \varepsilon$, "Mayor" a g(x), demuestra el límite, con la relación: $\delta = \varepsilon/5$. Interesante que el valor absoluto de la recta buscada intercepta a la función g(x), en el punto (3, 5) y a partir de allí es menor; lo que para nada contradice la definición gráfica de la demostración del límite, que busca un valor "mayor" alrededor cercano al punto de tendencia "a"; es decir como función más exigente para el estudio de la existencia real del límite.

Notas

a) La solución geométrica en el ejemplo 1 es diferente a la solución analítica inicial, considerando que la formalidad del límite es que el valor absoluto de la recta creada debe ser "Mayor" a la función g(x) = l f (x) – b) l, en torno al punto de tendencia "a" en la horizontal, para permitir la relación delta-épsilon que demuestra el límite. Es decir, en todas las definiciones actuales para rectas, se toma como relación delta épsilon la pendiente de la recta estudiada, cuyo valor absoluto viene a ser igual, (exactamente encima), de la función creada g(x).

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

Solución analítica en teoremas actuales, que viene a contradecir la definición formal del límite, cuando se dice que g(x) < ε.

b) La solución geométrica del ejemplo 2 confirma que la relación delta épsilon se da con el número real de la pendiente de la recta construida como función mayor; es decir, δ = ε/m con "m" como pendiente de L_1 creada. Esta afirmación existe en la actualidad, como teorema de la definición del límite para una recta, como "m" la pendiente de la recta estudiada y no de una recta "valor absoluto mayor creada".

c) Donde evidentemente este valor de pendiente, no puede ser cero o infinito, el primero no permite la relación que demuestra el límite y la lógica dice que la única recta posible que pase por el punto "a" es el eje horizontal, el cual no puede ser "mayor" a g(x), el segundo indica una recta vertical que pase por "a" lo cual no es una función, es x = a, asíntota vertical.

Ejemplos y teoremas derivados

La suficiente ejercitación o ejemplos permiten al estudiante, escoger según su criterio lo más importante en su entendimiento; es decir "Nota de cuadernos correctas que le permiten aprender cuando estudia fuera del salón de clase, en un principio de economía educativa" (Arce, 2018, p. 378).

Ejemplo 3: Demuestre que existe el límite, gráfica y analíticamente, de la función $y = (x + 2)^3$ para x → -1, esto es demuestre que se cumple que: $\lim_{x \to -1} ((x+2)^3) = 1$.

Por la definición analítica: $|(x + 2)^3 - 1| < \varepsilon$. Siempre y cuando $|x + 1| < \delta$.

Desarrollando la cúbica, sumándole el uno y buscando factores por "Ruffini" o factorización lógica, se obtiene que: $|x + 1||x^2 + 5x + 7| < \varepsilon$, no resulta en términos numéricos; para ello y observando la tendencia x → 1 construimos lo siguiente a partir de la relación

$a - \delta < x < a + \delta$ Es decir, con δ = 1: $-2 < x < 0$ → dos construcciones: $0 < x^2 < 4$ sumada con: $-10 < 5x < 0$. Que permite la relación: $-3 < x^2 + 5x + 7 < 11$

Entonces se demuestra el límite de la función cúbica porque existe una relación entre épsilon y delta como: δ = ε/11. Proveniente de: $|(x + 1)|\,11 < \varepsilon$. Con $|x + 1| < \delta$.

Luego para un δ = 0,1 dado en la construcción, se demuestra el límite: δ = ε/3,71. (Resultado a confirmar por el lector).

Por la definición gráfica propuesta: se grafica $g(x) = |(x + 2)^3 - 1|$. En verde, y se grafica una recta visualmente "mayor" que pase por el punto (-1, 0). L_1 en rosado. Con ensayos de rectas de pendientes positivas o negativas, hasta escoger el punto (- 2, 6) o (0, 6), cuyo valor absoluto unifica ambas rectas. Ver figura 5.

Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

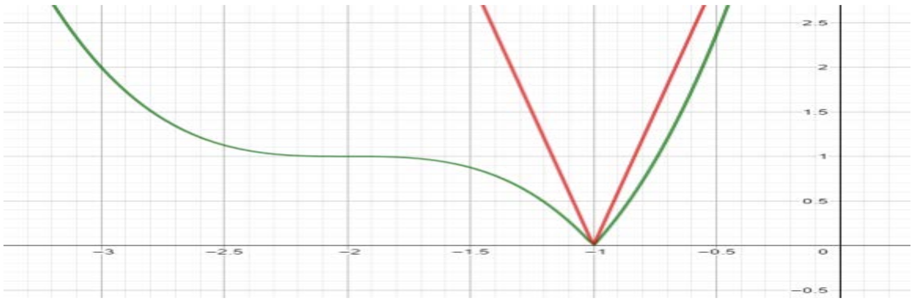

Figura 5. Gráfica $g(x) = |(x+2)^3 - 1|$, $L_1 = |6(x+1)|$, para $\lim_{x \to -1} ((x+2)^3) = 1$.

La recta L_1 como: $6|x + 1| < \varepsilon$, "Mayor" a g(x), demuestra el límite, con: **$\delta = \varepsilon/6$**. De hecho, el resultado gráfico puede aceptar valores desde pendiente 4 en adelante, por observación gráfica, cercana al punto de estudio "a". Es decir, la demostración del límite geométricamente es un rango de resultados que por lo general incluye a los resultados analíticos puntuales, donde el mínimo valor de pendiente se obtiene con la recta L_1 que intercepte a la función g(x) en una cercanía al punto "a".

Ejemplo 4: Demuestre que existe el límite gráfico, de la función y = Sen(x) igual a 1, cuando $x \to \pi/2$, esto es demuestre que se cumple: $\lim_{x \to \pi/2} ((\mathrm{Sen}(x)) = 1$.

Interesante que en funciones *Trascendentes* no se solicita el límite por definición analítica y no se hace en la actualidad, porque la construcción de este tipo de funciones en términos algebraicos no es sencilla y se expresan en términos de sucesiones (Edwars y Penney, 2015). Donde una función trascendente es aquella que: "No es algebraica o proveniente de funciones polinómicas" (p. 34); es decir, función que trasciende en sus resultados de imágenes de las operaciones comunes de suma, producto o división.

Entendiendo que no es buscar la solución o demostrar la tendencia, porque podríamos acudir a la noción tabular, es la demostración formal del límite, por la existencia de la relación real delta épsilon. Aporte de esta investigación, como avance en el conocimiento del límite de una función.

Por la definición: $|\mathrm{Sen}(x) - 1| < \varepsilon$. Siempre que $|x - \pi/2| < \delta$.

Se gráfica la función valor absoluto: $g(x) = |\mathrm{Sen}(x) - 1|$. Con el trazo de la recta que pasa por los puntos: ($\pi/2$, 0) y por, un punto donde visualmente alrededor de "a" sea mayor absolutamente a g(x); en este caso tomamos el (0, $\pi/2$), por similitud de factor.

Estos puntos construyen la recta L_1 en su fórmula punto pendiente como: $y = -(x - \pi/2)$. Que demuestra el límite con $\delta = \varepsilon$. Al cumplir que $|x - \pi/2| < \varepsilon$. Si $|x - \pi/2| < \delta$.

También se pudo tomar el punto (0, 1) que junto al punto de tendencia ($\pi/2$, 0), producen la recta $L_2 = -2/\pi\ (x - \pi/2)$. Que demuestra el límite con $\delta = \varepsilon.\pi/2$ o $\delta = 1{,}571\varepsilon$.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

Ver figura 6, donde se grafican g(x), en verde, L_1 en rosado y L_2 en azul.

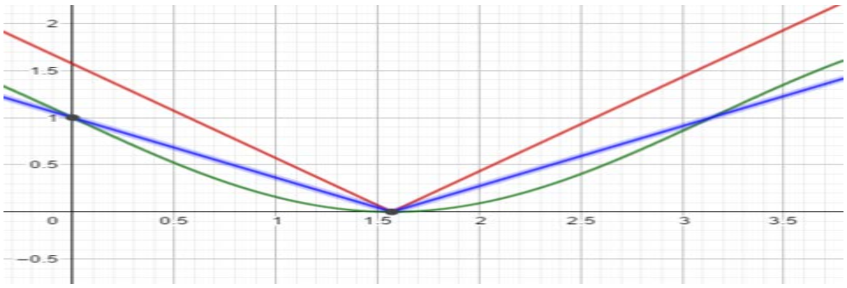

Figura 6. Demostración gráfica del límite de la función y = Sen(x), en x = π/2).

En adicional se observa que en esta función Sen(x), el rango de soluciones que permiten la relación delta épsilon estaría visualmente desde una pendiente de la recta mayor, desde el 0,4 en adelante, esto es, δ = 2,5ε.

Ejemplo 5: Demuestre que existe el límite gráfico, de la función y = ½.Ln|x + 1| igual a 0, cuando x → 0, esto es demuestre que se cumple: $\lim_{x \to 0}\left(½.\mathrm{Ln}\left|x + 1\right|\right) = 0$.

Por la definición: $\left|½.\mathrm{Ln}\left|x + 1\right|\right| < \varepsilon$. Siempre que $|x| < \delta$.

Se grafica g(x), como: = $\left|½.\mathrm{Ln}\left|x + 1\right|\right|$. Y la recta que pase por el punto "a" en el origen coordenado, donde visualmente sea mayor absolutamente a g(x); en este caso tomamos la recta de pendiente 3; es decir L_1: y = x. Que demuestran este límite por definición con la relación δ = ε. Al cumplir: $\left|½.\mathrm{Ln}\left|x + 1\right|\right| < |x| < \varepsilon$. Con $|x| < \delta$. Solución "gráfica" que se ilustra en la figura 8 a continuación, con g(x), en verde, L_1 en rosado.

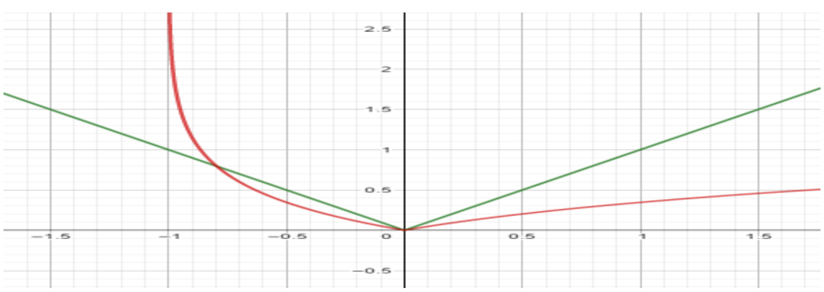

Figura 7. Demostración gráfica del límite de y = $\left(½.\mathrm{Ln}\left|x + 1\right|\right)$, en x = 0).

Nuevamente se observa que una recta de pendiente menor también demuestra el límite, aunque habría que ampliar el dibujo en el origen, así como rectas de pendiente mayor.

Ejemplo 6: Demuestre que existe el límite gráfica y analíticamente, de la función y = $\sqrt{x+4}$ igual a 3, cuando x → 5, esto es demuestre que se cumple: $\lim_{x \to 5}\sqrt{x+4}$ = 3.

Por definición $\left|\sqrt{x+4} - 3\right| < \varepsilon$. Siempre que $|x - 5| < \delta$.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

Método analítico: Por desarrollo conjugado: $\frac{x+4-9}{\sqrt{x+4}+3} \rightarrow \frac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}$. Donde debemos encontrar un valor numérico para: $\frac{1}{\sqrt{x+4}+3}$. La construcción para un valor delta de 0,1 es Partiendo de $|x-5| < \delta$. → 4,9 < x < 5,1. Quedando en: $\sqrt{8{,}9}+3 < \sqrt{x+4} - 3 < \sqrt{9{,}1}+3$

Que al ser invertido con respecto al producto queda: $\frac{1}{\sqrt{9{,}1}+3} < \frac{1}{\sqrt{x+4}-3} < \frac{1}{\sqrt{8{,}9}+3}$.

Este valor de la derecha "mayor" es 0,1671. Interesante que, para un delta dado de 1, el valor mayor queda de: 0,1716.

Expresando la definición como: $|\sqrt{x+4} - 3| < 0{,}1671.|x-5| < \varepsilon$. Con $|x-5| < \delta$.

Que permite demostrar el límite al existir la relación δ = 5,984ε.

Método gráfico: Se gráfica g(x) = $|\sqrt{x+4} - 3|$ y sobre esta curva se grafica el valor absoluto de la recta L_1 que pase por los puntos (0, 2) y (5, 0). Esto es la recta en "V": y = $\left|-\frac{2}{5}x+2\right|$. Ver la figura 9 a continuación, con g(x) en azul claro y L_1 en rojo. Que demuestra el límite de la función al existir la relación real delta épsilon como: $\delta = \frac{2}{5}\varepsilon$.

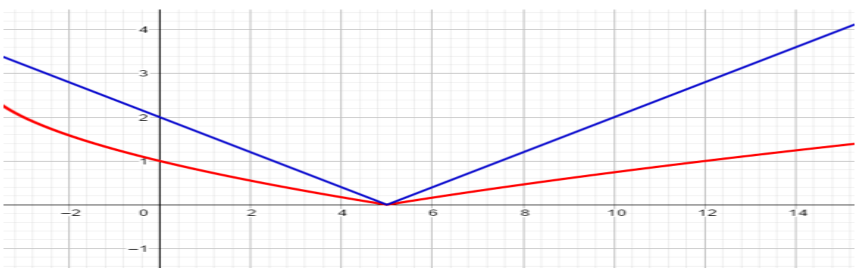

Figura 8. Demostración gráfica del límite de: y = $\sqrt{x+4}$, en x = 5).

Es evidente que la solución grafica está muy por encima de la función g(x), razón de la diferencia con la solución analítica para un delta dado de 0,1. Es decir, de escoger un punto menor en la ordenada, digamos el (0, 1) para la construcción de la recta L_1, el resultado sería de δ = 5ε.

Ejemplo 7: Demuestre gráfica y analíticamente que existe el límite de la función y = 2/x, en el punto x = ½. Esto es, demostrar: $\lim_{x \to ½} (2/x) = 4$. Y $\lim_{x \to 0+} (2/x) = \infty$

9) Por definición se pide $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < \varepsilon$. Siempre que $|x - ½| < \delta$.

Método analítico: Al multiplicar por "x" y factorizar el 4 queda: $\frac{4.\left|x-\frac{1}{2}\right|}{x}$.

Interesante que no se puede tomar el valor de delta en 1, porque se pasa de la asíntota vertical de la función hipérbole generando un valor negativo absurdo en el lado izquierdo de la relación. Situación similar para un delta igual a 0,5. Porque el rango de

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

tendencia escogido incluye la asíntota vertical que es un valor indefinido; es decir, se genera un valor cero en el lado izquierdo de la construcción, que no permite su inversión.

Entonces para delta igual a ¼, se construye $-1/4 < x - ½ < 1/4$. Partiendo de $|x - 1/2| < \delta$ Quedando como: $4/3 < 1/x < 4$. Que genera: $16/3 < \frac{4}{x} < 16$.

Expresando la definición como: $\left|\frac{2}{x} - 4\right| < 16.|x - 1/2| < \varepsilon$. Con $|x - 1/2| < \delta$.

Que permite demostrar el límite al existir la relación $\delta = \varepsilon/16$.

Se gráfica $g(x) = \left|\frac{2}{x} - 4\right|$. Con el valor absoluto de la recta L_1 construida al pasar por los puntos (½, 0) y (0, 5). Esto es la recta: $y = |-10x + 5|$ o $y = |-10(x - 1/2)|$. Ver la figura 10 siguiente, con g(x) en azul claro y L_1 en rojo. Que demuestra el límite de la función al existir la relación real delta épsilon como: $\delta = \varepsilon/10$.

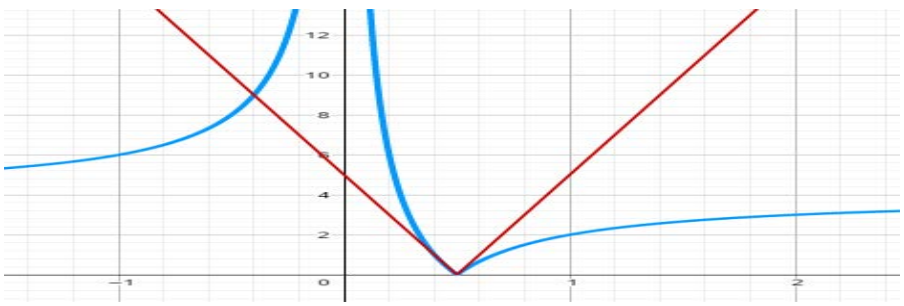

Figura 9. Demostración gráfica del límite de: y = 2/x, en x = ½.

La función g(x) como el valor absoluto del movimiento vertical de la función y = 2/x, conserva su asíntota vertical en la recta x = 0, (incólume), y su asíntota horizontal se mueve de la recta coordenada del eje "X", a la recta horizontal y = 4. Estudio del límite al infinito a considerar.

Por el trazo de las gráficas, apenas se aprecia que la recta L_1 creada, en su valor absoluto es mayor o está por encima de la función g(x). Es decir, estamos ante un lógico defecto del método gráfico, también llamado grafica de relaciones.

Es importante aclarar que el método "Grafica de relaciones" en ninguna de sus aplicaciones y avances conceptuales, supone desplazar la esencia analítica de la matemática formal; siempre es y será una herramienta didáctica de comparación de resultados, esencia matemática y por supuesto para retroalimentación del concepto.

Teoremas y axiomas desarrollados como propuestas

Entendiendo que son teoremas y axiomas relativos a la propuesta académica didáctica desarrollada sobre la definición formal del límite de una función. Nada que ver con los llamados teoremas sobre los límites, en donde se exponen estrategias algebraicas de resolución. (Zill y Wright 2011). O también llamadas leyes de los límites, para

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

resoluciones algebraicas solo analíticas de ejercicios dados para obtener la solución (Thomas, 2006).

Teoremas

I. La relación delta épsilon que demuestra el límite por su definición de cualquier recta del plano: y = mx + b. Es igual a $\delta = \varepsilon/m_1$. Donde m_1 es un valor ínfimamente mayor a la pendiente "m" de la recta estudiada. Con resultado: $\delta = \varepsilon/m$.

Como importante corrección a estos resultados de la actualidad, donde la definición se estaría considerando como "menor e igual a épsilon": $|f(x) - b| \leq \varepsilon$. En vez de menor. Demostración realizada en el ejemplo 1.

II. Todo polinomio de grado entero positivo, menos el valor resultante "b", o sea: (f(x) – b). Tiene una raíz en el valor x = a. Entonces con: $\lim_{x \to a} f(x) = b$. Se puede construir la relación analítica delta épsilon por factorización polinómica, según la dificultad. Situación que no ocurre en la definición grafica de la formalidad del límite.

III. En funciones cocientes y transcendentes el límite se demuestra con la relación delta épsilon $\delta = \varepsilon/m$. Donde "m" es la pendiente de una recta L_1 construida al pasar por los puntos (a, 0) y (B, 0). Donde "B" es un valor positivo en vertical ensayado por encima de la gráfica construida, o visualmente "mayor" que $g(x) = |f(x) - b|$. Teorema general de aporte en el avance del conocimiento.

Otra forma de construir la recta L_1 es encontrando el punto B, para un valor cercano de "a", es decir $x = a \pm \delta$. Por intercepción con la función $g(x) = |f(x) - b|$. esto es construir la recta con los puntos (a, 0) y (a + δ, g(a + δ)) o (a - δ, g(a - δ)). Cuyo valor absoluto se aprecie "mayor" a g(x). Estos puntos generan la menor relación delta épsilon, a diferencia del teorema III, como se aprecia en los ejemplos desarrollados geométrica.

Axiomas

I. La recta L_1 creada, no puede tener pendiente 0 al ser un valor constante horizontal, que para poder pasar por el punto "a" seria el mismo eje "X", y por lo tanto nunca mayor a la función $g(x) = |f(x) - b|$.

II. La recta L_1 creada no puede ser vertical, (pendiente infinita que pasa por "a"), porque no es una función, a pesar de siempre ser mayor a g(x); es decir, no tiene sentido esta relación.

III. La definición formal del límite, al existir $\delta = \varepsilon/m$ es real con "m" diferente de cero que produce un delta infinito, o diferente de infinito que produce un delta cero.

Como se aprecia a lo largo del trabajo, el dominio del método "Gráfica de Relaciones" es la esencia medular para descubrir que la definición formal del límite es una simplicidad geometría, al poder graficar $g(x) = |f(x) - b|$. De similar manera es el

Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

fundamento didáctico a la hora de enseñar los diferentes límites de las funciones y sus aplicaciones, así como la importante "Comparación de Resultados", como motor en la participación y motivación del estudiante en el desarrollo de la clase, en procura de sus aprendizajes.

Consideraciones finales

La estrategia empírica en esta investigación, para mostrar resultados y comparaciones obtenidos en respaldo a las nuevas teorizaciones propuestas; como avance en el conocimiento del límite de una función, es una característica de casi todo el desarrollo conceptual matemático en su historia. Es decir, no debe extrañar este proceder en las construcciones debidas a esta ciencia formal, cuyas formulaciones finales son usadas para otros desarrollos implícitos, así como por las demás ciencias, bajo su interpretación existencial y de utilidad.

Los límites por definición grafica en funciones trascendentes son únicos, y en definitiva vienen a nutrir la unidad de "límites" en la primera matemática universitaria, (conocida esta como generalidad en muchas carreras con los contenidos de: funciones, límites y la derivada con sus aplicaciones), en un aporte de descubrir la singular belleza de estos contenidos y su facilidad, en contrapartida de la negativa imagen que se tiene, en una fama mal habida.

Luego la propuesta académica es la de incluir la temática gráfica con resultados analíticos de comparación, del límite por definición, en asignaturas de mallas de carrera que enfoque en suficiente medida el tema y tipologías de las funciones del plano cartesiano: características, movimientos, condicionantes, inversas y cociente de una función. Para luego y después de estudiar los límites de una función en sus diferentes tipologías y aplicaciones, cerrar la unidad con la definición formal, analítica y grafica del límite, en funciones algebraicas y trascendentes.

Referencias

Arce, M. (2018). El cuaderno de matemáticas: un instrumento relevante en las aulas que suele pasar desapercibido. *RSME*, *21*(2), 367-387.

Artigue, M. (2006). La inteligencia del Cálculo. *Educación matemática*, 2(5).

Baldor, A. (2017). *Algebra*. Sexta edición. Madrid. España: EDIME.

Edwars, C. y Penney, D. (2015). *Cálculo con geometría analítica*. Segunda edición. México: Prentice Hall.

Hernández, E. (2016). *Calculo diferencial e integral*. Costa Rica: Editorial Revista Digital Matemática.

Hernández, C., Prada, R. y Ramírez, P. (2017). Obstáculos epistemológicos sobre los conceptos de límite y continuidad en cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería. *Perspectivas, 2*(2), 73-83.

Opuntia Brava
ISSN: 2222-081X
RNPS: 2074
Volumen: 14 Número: 1
Recepción: 08/05/2021 Aprobado: 18/12/2021

Larson, E. (2010). *Cálculo con geometría analítica*. Sexta edición. México: Mc Graw Hill.

Thomas, G. (2006). *Cálculo, una variable*. Onceava edición. México: Pearson. Addison Wesley.

Tirado, A. (2020). *El aprendizaje universitario de la matemática básica con los fundamentos de la praxis geométrica* (tesis doctoral inédita). Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Zill, D. y Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable*. *Transcendentes tempranas*. Cuarta edición. México: Mc Graw Hill.