EL CÁLCULO DIFERENCIAL Y LASCOTAS DE ERRORES EN LAS MEDICIONES INDIRECTAS, EN EL TRABAJO EXPERIMENTAL DE LA FISICA GENERAL

THE DIFFERENTIAL CALCULATION AND LASCOTES OF ERRORS IN INDIRECT MEASUREMENTS, IN THE EXPERIMENTAL WORK OF GENERAL PHYSICS

Lorenzo Pérez Milanés[1] (lorenzopm@ult.edu.cu)

RESUMEN

El artículo aborda la problemática del uso de la teoría de errores en la propagación de las mediciones indirectas que se efectúan en los laboratorios docentes de la institución a partir de la realización de experimentos físicos, problemas experimentales y prácticas de laboratorio, entre ellos, elementos y métodos del cálculo diferencial más utilizados en la propagación de cotas de errores de las mediciones indirectas. También se exponen algunas experiencias en la utilización de acciones metodológicas diseñadas con el objetivo de desarrollar habilidades en los estudiantes, con los contenidos fundamentales de la teoría de errores que reciben en las carreras en asignaturas de la disciplina Física General, para facilitar y propiciar el desarrollo de las actividades experimentales de los estudiantes de las carreras de Matemática-Física, Ingeniería Industrial, Agronomía e Informática.

Palabras claves: medición indirecta**,** cotas de errores, error relativo, diferencial exacta, y propagación cuadrática.

ABSTRACT

The article addresses the problem of the use of theory of errors in the propagation of indirect measurements that are carried out in the institution's teaching laboratories from physical experiments, experimental problems and laboratory practices, including elements and Differential calculus methods most commonly used in the propagation of error rates of indirect measurements. Some experiences are also presented in the use of methodological actions designed with the aim of developing skills in students, with the fundamental contents of the theory of errors that they receive in the courses in subjects of the General Physics discipline, to facilitate and foster the development Of the experimental activities of the students of Mathematics-Physics, Industrial Engineering, Agronomy and Informatics.

KEY WORDS: Indirect measurement, error rates, relative error, exact differential, and quadratic propagation.

En la disciplina Física General se expresa la vinculación del trabajo experimental contemporáneo, en términos académicos, con la universidad cubana. Su presencia en el diseño curricular de las carreras como Matemática-Física, Ingeniería Industrial, Agronomía, e Informática para citar algunas se desdobla en varias asignaturas en las cuales de abordan contenidos de la física. Esto explica la necesidad de renovar constantemente el proceso de enseñanza-aprendizaje de esta disciplina, pues resulta de vital importancia para alcanzar uno de los objetivos priorizados de la educación superior en Cuba: egresar un profesional que sea capaz de continuar aprendiendo, un individuo con habilidades para mantenerse actualizado y enfrentar los retos de la educación cubana.

---

[1] Licenciado en Educación. Especialidad Física y Astronomía, Máster en Tecnologías de la Informática y las Comunicaciones en Educación. Departamento Matemática-Física de la Universidad de Las Tunas, Cuba.

Su carácter eminentemente experimental, que depende mucho de la observación, de la medición y en general de la experimentación, así como, en particular, de la utilización de instrumentos y equipos que permiten ampliar el alcance de los sentidos para desentrañar fenómenos inaccesibles y perfeccionar el reflejo de la realidad, posibilitar el cumplimiento de aspectos contentivos en los modelos del profesional relacionados con el dominio de una visión global acerca de la matemática y la física, utilizar sus métodos y formas principales de trabajo, en correspondencia con el momento histórico y el lugar en que surgieron determinadas ideas o tuvieron lugar ciertos descubrimientos y aplicaciones.

Su contribución al establecimiento del método científico de investigación concretado en el modelo del profesional y en tal sentido, el uso de las matemáticas para la formulación y desarrollo de las teorías y de los recursos informáticos, así como la experimentación, constituyen los elementos que le permiten al futuro profesional explicar los fenómenos bajo estudio, resaltar la relatividad de la verdad y el carácter inagotable de los conocimientos, así como resolver problemas y reflexionar metacognitivamente sobre los resultados y su propio desempeño y por esta vía contribuir además, a la construcción del conocimiento científico de la realidad educativa y al perfeccionamiento de su labor.

Este artículo científico es resultado del proyecto de investigación sobre Didáctica de las Ciencias Exactas en el Dpto. de Matemática-Física de la institución. Trata unos de los problemas fundamentales para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina, la escases y falta de bibliografía especializada actualizada en nuestro país sobre la teoría de errores de acceso a profesores y estudiantes, en especial el tratamiento de la propagación de cotas de errores en las mediciones indirectas utilizando múltiples métodos del cálculo diferencial. Ejemplifica la deducción matemática de diferentes reglas de la propagación de cotas de errores a través del cálculo diferencial, la sistematización del mismo y el desarrollo del pensamiento lógico, sin dejar de mencionar los aportes de las experiencias o acciones metodológicas al respecto.

Preliminares

La Teoría de errores fundamenta la crítica de la medición, así como el proyecto de los sistemas destinados a ejecutarla, de ahí su importancia técnica y científica. Su papel, sin embargo, es solo metodológico: no constituye un fin por sí misma, sino un medio para el desarrollo de la física experimental.

El estudio de la Teoría de errores es una rama aparte de la Matemática por derecho propio, y por su extensión no se desarrollará por completo en este material. “El lector queda avisado de que lo que sigue es tan sólo un conjunto rápido y necesariamente breve de las reglas y métodos fundamentales en el ámbito de la teoría de errores para propagar cotas de errores en las mediciones indirectas” (Pérez, 2013, p. 3).

> Cuando se mide una cantidad, ya directa o indirectamente, la medida que se obtiene no es necesariamente el valor exacto de tal medida, ya que el resultado obtenido estará afectado por errores debidos a multitud de factores. Algo tan sencillo como medir la temperatura del aire con un termómetro, determinar la presión atmosférica utilizando un barómetro aneroide o el diámetro de un capilar mediante el microscopio de recorrido sufrirá errores debidos a la precisión de estos instrumentos debido a sus escalas, los reflejos del experimentador, las fluctuaciones de la temperatura, corrientes de aire, el número de medidas efectuadas, etc. Errores que se propagarán a cualquier cantidad derivada de ésta que queramos determinar, como por ejemplo la

viscosidad del aire o del agua, el número de moles encerrado en un bulbo de vidrio, etc. (Quirantes, 2017, pp. 1-2)

En estos casos es necesario estimar el error cometido al efectuar una medida o serie de medidas.

> El conjunto de reglas matemáticas dedicado a su estudio se conoce como teoría de errores, y resulta imprescindible tanto para sacar todo el partido posible a un conjunto de datos experimentales como para evaluar la fiabilidad de éstos. El estudio de la teoría de errores es una rama aparte de la matemática por derecho propio, y por su extensión no se desarrollará por completo en este material. El lector queda avisado de que lo que sigue es tan sólo un conjunto rápido y necesariamente breve de las reglas y métodos fundamentales en el ámbito de la teoría de errores para propagar cotas de errores en las mediciones indirectas" (Pérez, 2013, p.3).

En principio, ya se conocía de causas y factores tales como habilidades profesionales de los docentes, escasez de literatura especializada en el tema, etc. para llevar a cabo la tarea dentro de la dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje, lo cual también se manifiesta en los docentes del colectivo actual de Matemática-Física de la Facultad de Ciencias de la Educación Media de nuestra institución.

Se han revelado insuficiencias en los estudiantes de las carreras antes mencionadas en la aplicación de la teoría de errores en el trabajo experimental , así como de una estrategia en los colectivos de disciplina para llevar a cabo la labor y de acciones concretas para acometer la aplicación por parte de los estudiantes de los métodos del cálculo diferencial en la propagación de cotas de errores en las mediciones indirectas que se efectúan en las actividades experimentales con una concepción científica de lograr la independencia y la creatividad de estos.

Es por esto que se considera que los elementos de la teoría de errores que se ofrecen en el material, así como los ejemplos y experiencias de acciones concretas facilitaran la aplicación de los métodos del cálculo diferencial más usados en la propagación de errores de las mediciones indirectas por parte de los estudiantes, contribuyendo al despliegue exitoso de la actividad y al cambio de actitud del profesorado ante esta problemática pedagógica actual.

Aproximación del error absoluto a una diferencial exacta

"Para el estudiante que posea conocimientos de cálculo diferencial el cálculo de errores puede llevarse a cabo sin necesidad de recurrir a las reglas de propagación de errores que aparecen en tablas, que a veces no están al alcance de ellos, utilizando en su lugar algunas reglas de derivación" (Portuondo, 1983, p. 140).

Sea y una función continua de x en el intervalo $[x_1, x_2]$ en el cual se realizan mediciones de las variables x: y = f(x).

A cada valor de x corresponde un valor de y, y una variación Δx alrededor de x ocasionará una variación Δy en un entorno de y:

$$y - y_0 = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

o dividiendo por Δx en ambos miembros

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{[\mathbf{f}\ (\mathbf{x}\ +\Delta\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x})]}{\Delta X}$$

y tomando el límite cuando $\Delta x \to 0$:

$$\text{lím}\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\boldsymbol{lím}\frac{[\mathbf{f}\ (\mathbf{x}\ +\Delta\mathbf{x})-\mathbf{f}(\mathbf{x})]}{\Delta X}$$

$\Delta x \to 0 \quad \Delta x \to 0$

Por definición, el segundo miembro es la derivada de la función f(x) respecto a x: $\frac{df}{dX}$. Entonces:

$$\text{lím}\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{df}{dX}$$

$\Delta x \to 0$

Si en el proceso de límite no hacemos Δx infinitamente pequeño, sino tan solo una cantidad bastante pequeña, pero finita, la expresión anterior dejará de ser una igualdad exacta, pero se seguirá cumpliendo aproximadamente:

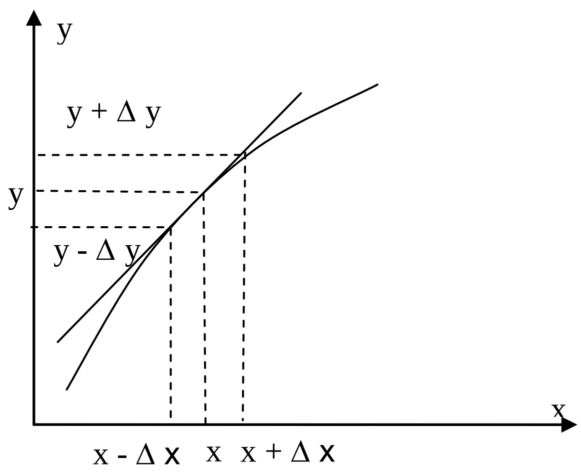
$$\frac{\Delta Y}{\Delta X}=\frac{df}{dX}$$

De aquí: $\Delta \boldsymbol{y} \approx \frac{df}{dX}\Delta \boldsymbol{x}$

$$\Delta \boldsymbol{y} \approx (\frac{dY}{dX})\Delta \boldsymbol{x} \quad (1)$$

Esta ecuación permite calcular con magnífica aproximación las variaciones que experimenta cierta función y = f(x) cuando la variable independiente sufre variaciones pequeñas, Dicha ecuación es fundamental para la propagación de errores: conocido el error experimental δx de la variable x , la variación δy de la función y=f(x) se podrá evaluar por la ecuación anterior, identificando las variaciones Δx y Δy con los errores δx y δy. De este modo, el error δx es aproximado al diferencial dx y el error δy al diferencial dy.

El grado de aproximación que implica la expresión$\Delta \boldsymbol{y} \approx (\frac{dY}{dX})\Delta \boldsymbol{x}$(2) puede comprenderse gráficamente mediante la figura:



Como se sabe la derivada $\frac{dY}{dX}$ evalúa la pendiente de la recta tangente a la curva y = f(x) en cada punto, pero si el Δx se toma suficientemente pequeño, el Δy medido sobre la curva y el correspondiente Δy que se mide sobre la recta prácticamente no diferirán uno de otro (al menos en las primeras cifras significativas). En consecuencia, puede plantearse:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} \approx \frac{df}{dX}$$

o $\frac{\delta Y}{\delta X} \approx \frac{df}{dX}$ que conduce directamente a la expresión (2)

Ejemplo:

Calcule sen 31^0, sin recurrir a tablas ni calculadoras.

R//: Ante un problema como este, y recordando que 30^0 es un ángulo notable próximo al de 31^0, podemos desdoblar 31^0 en: 31 = 30 + 1 y recordemos también que$\mathbf{1^0} = \frac{\pi}{180} \boldsymbol{rad}$

Ahora sea y = sen x , entonces : $\boldsymbol{\delta y} = \left[\boldsymbol{d}(\frac{senx}{dx})\right] \boldsymbol{\delta x}$, esto implica que$\delta$y = cos x δx

Para x = 30^0 y x = 1^0 = π /180 rad se tendrá:

$\boldsymbol{\delta y} = \mathbf{cos\, 30^0} \left(\frac{\pi}{180)}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{180)}\right)}$≈ 0.015

$$\boldsymbol{\delta y} \approx \mathbf{0.015}$$

Sen (30^0 + 1^0) ≈ y + δ y = sen 30^0 + 0. 015 = 0.5 + 0. 015

osea,sen 31^0 ≈ 0.515

Si se tratase de un cálculo de errores y se tuviese x = 30^0 medido con un error de ± 1^0, entonces su función seno será exacta hasta las centésimas: sen (30 ± 1) = 0.500 ± 0.015

Cálculo de errores en funciones de una variable

"Supongamos que la magnitud y cuyo valor queremos hallar depende solamente de otra magnitud x, mediante la relación funcional y=f(x). Si aplicamos la expresión (2) a las distintas funciones elementales de una variable se obtendrán de inmediato las correspondientes reglas de propagación de errores que aparecen en tablas con lo cual se puede prescindir de las mismas" (Portuondo, 1983, p. 142).

a) Sea y = x^m, aplicando (2):

$$\boldsymbol{\delta y} \approx \left[\frac{\boldsymbol{d(X^m)}}{\boldsymbol{dX}}\right] \boldsymbol{\delta x}$$

$\delta y = m\, x^{m-1} \delta x$

dividiendo por x^men ambos miembros:

$$\frac{\delta y}{y} = \boldsymbol{m}\frac{\delta x}{x} \text{(Regla 5)}$$

b) Sea y = senx, aplicando (2):

$$\boldsymbol{\delta y} \approx \left[\frac{\boldsymbol{d(senX)}}{\boldsymbol{dX}}\right] \boldsymbol{\delta x} = \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x \delta x}$$

$$\boldsymbol{\delta y} = \mathbf{cos}\, \boldsymbol{x\delta x}\text{(Regla 8)}$$

c) Sea y = tan x, aplicando (2):

$$\boldsymbol{\delta y} = \left[\frac{\boldsymbol{d(tanX)}}{\boldsymbol{dX}}\right]\boldsymbol{\delta x} = \boldsymbol{sec^2\, x\delta x}$$

$$\boldsymbol{\delta y} = \frac{\delta x}{cos^2 x}\text{(Regla 10)}$$

d) Sea y = e^x, aplicando (2):

$$\boldsymbol{\delta y} = \left[\frac{\boldsymbol{d(e^X)}}{\boldsymbol{dX}}\right]\boldsymbol{\delta x} = \boldsymbol{e^X\, \delta x}$$

$$\boldsymbol{\delta y} = \boldsymbol{e^X\, \delta x}\text{ (Regla 12)}$$

De modo similar puede procederse con las demás funciones de la tabla y con cualesquiera otras funciones de una variable:

<u>Ejemplo</u>

1) Un ejemplo importante y frecuente en el laboratorio sobre las medidas indirectas es el siguiente:

Supongamos que queremos medir el periodo P de un oscilador, es decir, el tiempo que tarda en efectuar una oscilación completa, y disponemos de un cronómetro que aprecia las décimas de segundo, 0.1 s. Medimos el tiempo que tarda en hacer 10 oscilaciones, por ejemplo 4.6 s, dividiendo este tiempo entre 10 resulta P=0.46 s, que es el periodo "medio".

$$P = \frac{t}{10}\, \Delta P = \frac{\Delta t}{10}$$

Obtenemos para el error ΔP=0.01 s. Por tanto, la medida la podemos expresar como

P=0.46±0.01 s

Es evidente, que podemos aumentar indefinidamente la resolución instrumental para medir P aumentando el número de periodos que incluimos en la medida directa de t. El límite está en nuestra paciencia y la creciente probabilidad de cometer errores cuando contamos el número de oscilaciones. Por otra parte, el oscilador no se mantiene con la misma amplitud indefinidamente, sino que se para al cabo de un cierto tiempo.

2) Se mide x = ($\frac{\pi}{3}$ + 0.01) rad y se debe evaluar la función y = e^{-x}cos x para dicho valor de x. Calcule el error aproximado δy y exprese el valor resultante en la forma y ±δy.

Tendremos:

$$\boldsymbol{\delta y} = \left(\frac{dy}{dx}\right)\boldsymbol{\delta x} = \left[\frac{d(e^{-x})}{dx}\boldsymbol{cosx} + \boldsymbol{e^{-x}}\frac{d(cosx)}{dx}\right]\boldsymbol{\delta x}$$

$$\boldsymbol{\delta y} = -\boldsymbol{e^{-x}}(\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{senx})\boldsymbol{\delta y}$$

Evaluando:

$$\boldsymbol{\delta y} = -\boldsymbol{e^{\frac{-\pi}{3}}}\left(\boldsymbol{cos\frac{\pi}{3}} + \boldsymbol{sen\frac{\pi}{3}}\right)\mathbf{0.01} \approx \mathbf{0.005}$$

Por su parte$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{e}^{\frac{-\pi}{3}}\left(\boldsymbol{cos}\frac{\pi}{3}\right) \approx \mathbf{0.175}$

Entonces el resultado de evaluar la función $\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{3}$será:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{0.175} \pm \mathbf{0.005}$$

En realidad esta función y no sufre iguales variaciones δ y cuando x varía en δx = 0.01 que cuando varía en - δx = - 0.01, pero dentro de la exactitud con que se expresan los errores la diferencia entre ambos δy sería inclusive menor que la contenida en el redondeo de 0.0048 a 0.005.

Propagación de cotas de errores en operaciones aritméticas

Función de varias variables

"La magnitud y viene determinada por la medida de varias magnitudes x_1, x_2, x_3, etc., con la que está ligada por la función $y=f(x_1, x_2, x_3...)$. La propagación de cotas de errores en operaciones aritméticas es también realizable mediante **la diferenciación"** (Portuondo, 1983, p.143).

Suma: (Regla 1 de la tabla)

Sea $y = x_1 + x_2$

Como el diferencial de la suma es igual a los diferenciales, entonces

$$dy = dx_1 + dx_2$$

Aproximando las cotas de errores a los diferenciales:

$$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$$

a) **Diferencia:**(Regla 2 de la tabla)

Sea $y = x_1 - x_2$

Diferenciando: $dy = dx_1 - dx_2$

Teniendo en cuenta que puede darse el caso en que ambos sumandos queden con el mismo signo

$$|dy| = |dx_1| + |dx_2|$$

Aproximando las cotas de errores a los diferenciales:

$$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$$

b) **Producto**(Regla 3 de la tabla)

Sea y = u v

Donde u y v pueden interpretarse como dos funciones de x.

Diferenciando el producto:

$$dy = v\, d u + u\, d v$$

Aproximando las cotas de errores a los diferenciales:

$$\delta y = v\, \delta u + u\, \delta v$$

que es la propagación del error absoluto o del producto.

Dividiendo ambos miembros por uv:

$$\frac{\delta y}{UV} = V\frac{\delta U}{U} + U\frac{\delta V}{V}$$

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta U}{U} + \frac{\delta V}{V}$$

que es la propagación del error relativo del producto.

c) Cociente(Regla 4 de la tabla)

Sea y=$\frac{U}{V}$

Donde u y v pueden interpretarse como dos funciones de x.

Asumamos que v ≠ 0 y diferenciando el cociente:

$$dy = \left(\frac{dU}{V}\right) - \left(\frac{U}{V^2}\right)dV$$

Teniendo en cuenta que ambos sumandos pueden quedar positivos

$$|dy| = \left|\left(\frac{dU}{V}\right)\right| + \left|\left(\frac{U}{V^2}\right)\right|dV$$

Aproximando las cotas de errores a los diferenciales y asumiendo positivos los valores medidos de u y v: $\delta y = \left(\frac{\delta U}{V}\right) + \left(\frac{U}{V^2}\right)\delta V$que es la propagación del error absoluto o del cociente.

Dividiendo ambos miembros por $\frac{U}{V}$:

$$\frac{\delta y}{y} = \frac{\delta U}{U} + \frac{\delta V}{V}$$

que es la propagación del error relativo del cociente.

En la tabla siguiente se muestran las reglas de propagación de cotas de errores usadas en el laboratorio docente por los estudiantes, de forma memorística o reproductiva, sin la utilización de los métodos de análisis del cálculo diferencial.

Nro.	Función	Error absoluto	Error relativo
1	$y = x_1 + x_2$	$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$	$\delta_r = \delta y/y$
2	$y = x_1 - x_2$	$\delta y = \delta x_1 + \delta x_2$	$\delta_r = \delta y/y$
3	$y = x_1 x_2$	$\delta y = y\delta_r$	$\delta_r = \delta x_1/x_1 + \delta x_2/x_2$
4	$y = x_1 / x_2$	$\delta y = y\delta_r$	$\delta_r = \delta x_1/x_1 + \delta x_2/x_2$
5	$y = x^m$	$\delta y = y\delta_r$	$\delta_r = m\, \delta x/x$
6	$y = {}^m\sqrt{x}$	$\delta y = y\delta_r$	$\delta_r = 1/m\, \delta x/x$
7	$y = x_1^{\eta} x_2^{\beta}$	$\delta y = y\delta_r$	$\delta_r = \eta(\delta x_1/x_1) + \beta(\delta x_2/x_2)$
8	$y = \text{sen}\, x$	$\delta y = \delta x \cos x$	$\delta_r = \delta y/y$
9	$y = \cos x$	$\delta y = \delta x\, \text{sen} x$	$\delta_r = \delta y/y$
10	$y = \tan x$	$\delta y = \delta x / \cos^2 x$	$\delta_r = \delta y/y$
11	$y = \cot x$	$\delta y = \delta x / \text{sen}^2 x$	$\delta_r = \delta y/y$
12	$y = e^x$	$\delta y = \delta x\, e^x$	$\delta_r = \delta y/y$
13	$y = \ln x$	$\delta y = \delta x / x$	$\delta_r = \delta y/y$
14	$y = \lg x$	$\delta y = 0.43429\ \delta x / x$	$\delta_r = \delta y/y$

* El símbolo δ significa las cotas de errores de las magnitudes x e y, así como lg es el símbolo del logaritmo decimal o de base 10. Si y = lg x, entonces su derivada dy/dx = 1/x (lg e) ≈ 0.43429/x, siendo e = 2.718281828459 aproximadamente.

Ejemplo de acción metodológica

Objetivos: Desarrollar habilidades en los estudiantes al aplicar el “método de diferenciación” para la propagación de cotas de errores en las mediciones indirectas.

Sugerencias: Esta acción consiste en determinar la expresión del error relativo de la energía cinética de un cuerpo a partir de una serie de mediciones directas con los instrumentos correspondientes, lo que permitirá en clases prácticas del tema de Trabajo y Energía ejercitar a los estudiantes en el método de diferenciación que será usado en las próximas actividades experimentales que se orientaran en la asignatura.

Enunciado: a) Hállese la expresión del error relativo y absoluto al calcular la energía cinética de un cuerpo, si la masa de éste se mide pesándolo directamente y la velocidad se calcula por la fórmula $v = \frac{L}{t}$, donde L y t se miden directamente. Aplique el método de diferenciación.

b) Hállese el error absoluto y el relativo utilizando el método de la diferenciación en la determinación del volumen de un cilindro, si al medirlo se obtienen valores del radio R = (6.0 ± 0.1) cm y de la altura H = (10.0 ± 0.2) cm.

Propagación de errores relativos: Método logarítmico

“Para propagar cotas de errores relativos resulta muy útil aplicar logaritmo natural a la expresión objeto de cálculo y realizar después la diferenciación de cada sumando logarítmico: se obtiene automáticamente el error relativo de la expresión en función del error relativo de los factores” (Portuondo, 1983, p. 144).

Recordemos primero que sí y = ln x, entonces:

$$dy = \left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)dx = \left(\frac{1}{x}\right)dx$$

Note que el cociente$\frac{dx}{x}$, aproximando δ x = dx , se convierte en el error relativo de la variable x:$\frac{\delta x}{x}$.

Así si se tiene una expresión del tipo$y = \frac{x_1{}^{\alpha} x_2{}^{\beta}}{x_3{}^{\gamma}}$con α, β y γ positivos, entonces:$lny = \propto \ln x_1 + \beta \ln x_2 - \gamma lnx_3$

diferenciando ambos miembros:

$$dy/y = \propto \frac{dx_1}{x_1} + \beta \frac{dx_2}{x_2} - \gamma \frac{dx_3}{x_3}$$

Teniendo en cuenta la posibilidad de que todos los sumandos fuesen positivos:

$$|dy/y| = \propto \left|\frac{dx_1}{x_1}\right| + \beta \left|\frac{dx_2}{x_2}\right| + \gamma \left|\frac{dx_3}{x_3}\right|$$

Aproximando las cotas de errores a los diferenciales y asumiendo positivos x_1, x_2 y x_3:

$$|\delta y/y| = \propto \left|\frac{\delta x_1}{x_1}\right| + \beta \left|\frac{\delta x_2}{x_2}\right| + \gamma \left|\frac{\delta x_3}{x_3}\right|$$

Debe tenerse en cuenta que si a su vez x_1, x_2y x_3 fuesenresultados de sumas o restas, o resultado de evaluar alguna función, sus errores δx_1, δx_2 y δx_3 se evaluaran conforme a lo explicado en el epígrafe anterior. No olvide que, al aplicar logaritmos a sumas y restas, <u>no se cumple</u> que el logaritmo de la suma sea igual a la suma de los logaritmos; el logaritmo de una suma no puede reducirse a operaciones más sencillas.

<u>Ejemplo:</u>

Un tubo tiene longitud L, radio interior r, radio exterior R y densidad ρ ; se conocen las cotas de errores δL, δr,δR y $\delta\rho$. Encuentre la expresión para la masa M del tubo y la cota de error δ M.

El volumen de un tubo (cilindro hueco) es:

$$V = \pi L\ (R^2 - r^2)$$

y su masa:

$$M = \pi\rho\ L\ (R^2 - r^2)$$

Aplicando logaritmos:

ln M = ln π + ln ρ + ln L + ln $(R^2 - r^2)$

Diferenciando y sustituyendo los diferenciales por los errores:

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta L}{L} + \frac{\delta(R^2 - r^2)}{(R^2 - r^2)}$$

Ahora:$\delta\ (R^2 - r^2) = \delta\ R^2 + \delta\ r^2 = 2R\delta R + 2r\delta r$

Donde se han aplicado a los errores las reglas de diferenciación.

Entonces:

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\delta L}{L} + \frac{2R\delta R}{(R^2 - r^2)} + \frac{2r\delta r}{(R^2 - r^2)}$$

Sustituyendo M por su equivalente y despejando δ M se obtiene tras algunas simplificaciones:

$$\delta M = \pi L(R^2 - r^2)\delta\rho + \pi\rho(R^2 - r^2)\delta L + \pi\rho L 2R\delta R + \pi\rho L 2r\delta r$$

Diferencial total y derivadas parciales en la propagación de cotas de errores

Cuando una variable k es función de varias variables x, y, z:

k = k (x, y, z)

Cualquier variación en x ó y ó z conlleva un cambio en la variable k; igualmente si cambian a la vez dos variables o las tres.

La forma en que se relaciona el cambio diferencial dk con los cambios diferenciales dx, dy, dz es:

$$dk = \frac{\partial k}{\partial x}dx + \frac{\partial k}{\partial y}dy + \frac{\partial k}{\partial z}dz$$

donde dk es la diferencial exacta de la función k, y$\frac{\partial k}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y} y \frac{\partial k}{\partial z}$son sus derivadas parciales.

Si se aproximan los diferenciales a las cotas de errores:

$$\delta k = \left|\frac{\partial k}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial k}{\partial y}\right|\delta y + \left|\frac{\partial k}{\partial z}\right|\delta z$$

Expresión que permite el cálculo de la cota de error absoluto δk en función de las cotas de errores de las variables medidas. En esta expresión los sumandos se expresan siempre positivos, aun cuando alguna derivada parcial dé negativa al ser evaluada, pues como se sabe, la variación diferencial de la variable podría también ser negativa y el producto de ambos ser positivo.

La expresión anterior puede ser generalizada a más de tres variables independientes. El cálculo de cotas de errores mediante derivadas parciales conduce a los mismos resultados que el método logarítmico y es cuestión de comodidad adoptar una u otra vía. “El método logarítmico aplicado a sumas y restas requiere de todos modos una diferenciación extra para el cálculo del error en la suma o resta, y el método del diferencial total acomete esta diferenciación de modo directo” (Portuondo, 1983, p. 146).

Ejemplo:

Veamos el siguiente problema:

En una fuente, se ha llenado completamente de agua un recipiente de base cuadrada de lado L y altura h en un tiempo t y se quiere determinar el caudal medio q que mana de la fuente. Los valores medidos han sido:

L = (22.4±0.1) cm

h = (53.5±0.5) cm

t = (323.2±0.3) s

El caudal medio se calcula dividiendo el volumen total de agua por el tiempo que ha tardado en llenarse el recipiente

$$q = \frac{L^2 h}{t} = q(L, h, t)$$

La incertidumbre de que responderá pues a la expresión

$$\delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial L}\right| \delta L + \left|\frac{\partial q}{\partial h}\right| \delta h + \left|\frac{\partial q}{\partial t}\right| \delta t = \left|\frac{2Lh}{t}\right| \delta L + \left|\frac{L^2}{t}\right| \delta h + \left|\frac{L^2 h}{t^2}\right| \delta t$$

Teniendo en cuenta que L, h y t son siempre positivos, se puede escribir

$$\delta q = \frac{2Lh}{t} \delta L + \frac{L^2}{t} \delta h + \frac{L^2 h}{t^2} \delta t$$

Al particularizar estas dos expresiones para los valores que se hayan medido se obtiene la medida indirecta del caudal con su incertidumbre.

$$q = \frac{L^2 h}{t} = (22.4\ cm)^2 \frac{53.5\ cm}{323.2\ s} = \ 83.06\ cm^3 s^{-1}$$

NÓTESE que la cuarta cifra del resultado es de seguridad.

Como $\delta q = \frac{2Lh}{t} \delta L + \frac{L^2}{t} \delta h + \frac{L^2 h}{t^2} \delta t$

$$\delta q = \frac{(2)(22.4cm)(53.5cm)}{(323.2s)}(0.1cm) + \frac{(22.4cm)^2}{(323.2s)}(0.5cm) + \frac{(22.4cm)^2(53.5cm)}{(323.2s)^2} 0.3s$$

$$\delta q = 0.74\ cm^3 s^{-1} + 0.78\ cm^3 s^{-1} + 0.077 cm^3 s^{-1} = 1.60\ cm^3 s^{-1} \approx 1.6\ cm^3 s^{-1}$$

<u>NOTE que:</u>

- La incertidumbre calculada por propagación de errores tiene las mismas unidades que el valor calculado del mensurando.
- Todas las componentes de la incertidumbre se suman entre sí, nunca se restan.

Para estimar la incertidumbre asociada a este valor calculado del caudal es necesario derivar parcialmente esta expresión de q respecto de L, h y t; esto es, calcular la derivada respecto de cada una de las variables considerando que las demás son constantes. Así para derivar parcialmente respecto de L se tratan h y t como si fuesen constantes.

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \frac{\partial\left(L^2 h/_t\right)}{\partial L} = 2L \frac{h}{t}$$

y se procede de forma análoga para derivar parcialmente respecto de h y de t

$$\frac{\partial q}{\partial h} = \frac{\partial\left(L^2 h/_t\right)}{\partial h} = \frac{L^2}{t}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial\left(L^2 h/_t\right)}{\partial t} = -\frac{L^2 h}{t^2}$$

Hemos realizado las operaciones intermedias guardando una cifra de seguridad como se indica en las recomendaciones para la realización de cálculos con cantidades aproximadas y al sumar todas las componentes de la incertidumbre hemos encontrado que su valor tiene probablemente dos cifras significativas. Podemos entonces expresar el resultado como

$$q = (83.1 \pm 1.6)cm^3s^{-1}$$

o si queremos, podemos redondear el error por exceso a una sola cifra significativa

$$q = (83 \pm 2)cm^3s^{-1}$$

Propagación cuadrática de errores

La propagación de cotas de errores podemos realizarla aproximando la cota de error resultante, δk, al diferencial total

$$\delta k = \frac{\partial k}{\partial x}\delta x + \frac{\partial k}{\partial y}\delta y + \frac{\partial k}{\partial z}\delta z + \cdots + \frac{\partial k}{\partial u}\delta u$$

De modo análogo, la propagación cuadrática de errores aleatorios puede realizarse por la expresión:

$$\delta k = \sqrt{\left[\frac{\partial k}{\partial x}\delta x\right]^2 + \left[\frac{\partial k}{\partial y}\delta y\right]^2 + \left[\frac{\partial k}{\partial z}\delta z\right]^2 + \cdots + \left[\frac{\partial k}{\partial u}\delta u\right]^2}$$

"Recordamos que los errores aleatorios <u>no son cotas de errores</u>, sino un estimado de la variación que se puede producir entre el valor verdadero de la magnitud y el valor reportado, dentro de cierto nivel de confianza o probabilidad" (Portuondo, 1983, p.150). Una medición aislada e inclusive, el valor medio de una nueva serie de mediciones podría diferir del valor medio reportado inicialmente en una cantidad mayor que el error de la media; esta posibilidad tiene una probabilidad no nula. Luego repetimos, el error aleatorio (error de la media) no representa una cota de error.

<u>Experiencia práctica</u>

A continuación, mostraremos una de las experiencias del autor en la impartición del tema de Líquidos correspondiente a la asignatura de Física General II que se imparte en el 3er año de la carrera de Matemática-Física de la institución.

-Consideremos el estudio experimental realizado por los estudiantes para la determinación del coeficiente de tensión superficial del agua a la temperatura ambiente por el método por goteo. Dentro de sus objetivos está el de aplicar el método de mínimos cuadrados para el procesamiento de los datos experimentales.

El coeficiente se determinará por la expresión:

$$\sigma = \frac{mg}{\pi d_m}$$

Donde, m: es la masa de <u>una gota de agua</u> que se determinará por el # de gotas que cae de la bureta por la gravedad a un recipiente recolector mediante un goteo regular y empleando la balanza se medirá la masa del # de gotas prefijado por el experimentador. Si se hace el experimento para 20, 40, 60, 80 y 100 gotas y se obtienen las masas de las respectivas gotas se puede mediante un gráfico de masas de las gotas en función del número de gotas m = f (# de gotas) obtener de la pendiente del gráfico la masa de una gota.

g: valor de la aceleración de la gravedad.

d_m: diámetro medio de la punta de la bureta por donde salen las gotas de agua.

- Ahora le expresión de trabajo será:

$$\sigma = \frac{bg}{\pi d_m}$$

En la que m = b; pendiente del gráfico.

Aplicándole el método logaritmo o el de la diferencial total a la expresión de trabajo, la propagación de cotas de errores será:

Aplicando logaritmos:

$$ln\sigma = \ln b\ + \ln g - \ln \pi + lnd_m$$

Diferenciando y sustituyendo los diferenciales por los errores:

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta g}{g} - \frac{\delta\pi}{\pi} - \frac{\delta d_m}{d_m}$$

Teniendo en cuenta que los sumandos pueden quedar positivos y que δ g / g y $\delta\pi$ / π se desprecian pues no se midieron en el laboratorio nos queda que el <u>error relativo</u> es:

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \frac{\delta b}{b} + \frac{\delta d_m}{d_m}$$

$$\delta\sigma = \sigma\left(\frac{\delta b}{b} + \frac{\delta d_m}{d_m}\right)$$

Entonces:$\delta\sigma = \sigma\left(\frac{\delta b}{b} + \frac{\delta d_m}{d_m}\right)$es el <u>error absoluto</u>de la medición deσ y el error cuadrático estará dado por:

$$\frac{\delta\sigma}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{\delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\delta d_m}{d_m}\right)^2}$$

En la tabla 1 siguiente aparecen los valores de las mediciones del experimento:

Tabla 1: Mediciones del experimento

# de gotas (x)	Masa (g) (y)	Mediciones	Se utilizó agua <u>no destilada</u> disponible
20	1.1	dm = 1 mm=10^{-3} m	en el laboratorio
40	2.2	δd_m= 0,5x10^{-3}m	
60	3.3	g = 9.782 m/s^2	Valor medido en La Habana, por M.F.Gran

80	4.5	π = 3.14	
100	5.6	T=28 0_c	
		$\sigma_{Teórico}$= 0.100 N/m	

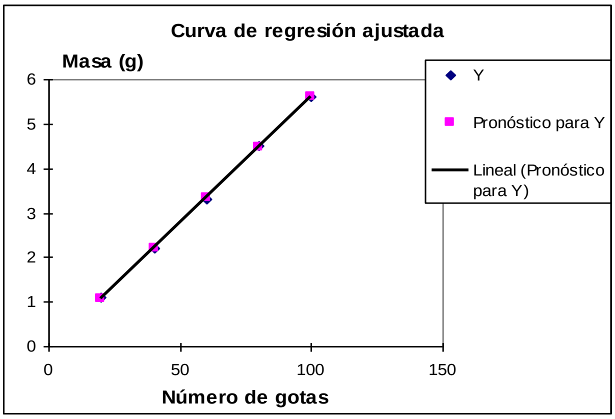
En la tabla 2 siguiente aparecen los resultados del procesamiento con el tabulador Excel para el cálculo de errores aplicando el método de mínimos cuadrados:

Tabla 2: Resultados del procesamiento con el tabulador Excel

Resultados de Excel Resumen		
Estadísticas de la regresión		
Coeficiente de correlación múltiple	0,999882549	
Coeficiente de determinación R^2	0,999765111	
R^2 ajustado	0,999686815	
Error típico	0,031622777	
Observaciones	5	
ANÁLISIS DE VARIANZA		
	Grados de libertad	Suma de cuadrados
Regresión	1	12,769
Residuos	3	0,003
Total	4	12,772
	Coeficientes	Error típico
Intercepción (a)	-0,05 g / #gotas	0,033166248
Variable X 1 (b)	0,0565 g	0,0005

En el gráfico 1 contiene la curva de regresión ajustada aplicando mínimos cuadrados:

Gráfico 1: Curva de regresión ajustada



En la tabla 3 siguiente aparecen los resultados en el SI:

Tabla 3: Los resultados en función del sistema internacional de unidades

	Resultados del software en el S. I. de unidades	
b	$5,65\mathrm{x}10^{-5}$ kg/gotas	
a	$- 5\mathrm{x}10^{-5}$ kg	
δb	$5\mathrm{x}10^{-7}$ kg/gotas	No tuvimos en cuenta errores de exactitud de los instrumentos, sólo el aleatorio del cálculo de la pendiente
δa	$3, 3166248\mathrm{x}10^{-5}$ kg	No tuvimos en cuenta errores de exactitud de los instrumentos, sólo el aleatorio del cálculo del intercepto
σ	0,175924 N/m	
δσ	0,085 N/m	
δσ/σ	50 %	
Dp	7 %	
σ±δσ	0,17 N/m ± 0,08 N/m	

* Dp = $|\sigma_{exp} - \sigma_{Teórico}|$: discrepancia porcentual

- Si ahora resolvemos el problema obteniendo la masa de la gota de agua por **método gráfico**, utilizando un papel milimetrado y escogiendo dos puntos del mismo:

x_1=40 gotas, y_1=2,25x10^{-3}kg, x_2=100 gotas, y_2=5,5x10^{-3} kg; entonces determinamos la pendiente como: $\boldsymbol{m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 54 \cdot 10^{-5}\, {}^{kg}/_{\#\, degotas}}$, que no es más que la masa de una gota de agua que se necesita para determinar el coeficiente de tensión superficial de esta sustancia.

En la tabla 4 siguiente aparecen los resultados utilizando el método gráfico:

Tabla 4: Los resultados por el método gráfico

		Resultados por el método gráfico	
b		5.41666x10^{-5} kg/gotas	
a		0.05x10^{-3} kg	
δb		34.1x10^{-7} kg / gotas	Se incluye error aleatorio, de exactitud de los instrumentos y de las escalas del gráfico para determinar la pendiente
δa		No nos interesa para el análisis	
σ		0,1689669 N/m	
δσ		0.085 N/m	
δσ/σ		50 %	
Dp		6.89 %	
σ±δσ		0.17 N/m ± 0.08N/m	

	Resultados por el método gráfico	Resultados por el método mínimos cuadrados
b	$5.41666x10^{-5}$ kg/gotas	$5.65x10^{-5}$ kg/gotas
a	$0.05x10^{-3}$ kg	$- 5x10^{-5}$ kg
δb	$34.1x10^{-7}$ kg / gotas	$5x10^{-7}$ kg / gotas
σ	0.1689669 N/m	0.175924 N/m
$\delta\sigma$	0.085 N/m	0.085 N/m
$\delta\sigma/\sigma$	50 %	50 %
Dp	6.89 %	7.00 %
$\sigma\pm\delta\sigma$	0.17 N/m ± 0.08N/m	0,17 N/m ± 0,08 N/m

Análisis final

- Haciendo finalmente una comparación entre los indicadores calculados y relacionados con la determinación de la pendiente como masa de una gota de agua, por ambos métodos expuestos anteriormente, se concluye que:

  - El error absoluto con que se determinó la masa de una gota de agua δb o error de la pendiente por el método de mínimos cuadrados es inferior al determinado por el método gráfico, es decir, la medición de la gota de agua es más exacta y más precisa por el método de mínimos cuadrados como se había predicho inicialmente, lo cual demuestra la potencialidad científica del cálculo diferencial en su utilización para la teoría de errores en la propagación de cotas de errores y en el ajuste de gráficos experimentales en el laboratorio de Física.

    $5x10^{-7}$□□/□□□□□ < $34.1x10^{-7}$□□/□□□□□

  - También se observa que el coeficiente de tensión superficial por ambos métodos fue determinado con la misma precisión y exactitud.
  - En este experimento el error fundamental que se comete es en la medición del diámetro medio de la punta de la bureta por donde salen las gotas de agua, y el de haber utilizado un agua no destilada que contiene otros componentes químicos no previstos en el valor teórico del coeficiente, pues este se refiere a la sustancia formada por moléculas de hidrógeno y oxígeno.

Otro ejemplo clásico sobre la propagación de errores cuadráticos y demás métodos tratados lo puede ver al “calcular el número de moles a partir de la comprobación experimental de la ley de Boyle-Mariotte y a partir de la ecuación (5) $n= - m'V^2/RT$ (5)” (Pérez, 2015, p. 10), proponer una expresión para la propagación cuadrática de sus errores.

Sugerencias

- Las asignaturas de la disciplina deben tener en su preparación los contenidos que tendrán salida a través del trabajo experimental.
- En la preparación de las asignaturas debe de quedar claro, la orientación, ejecución y control del tratamiento a la teoría de errores, en especial, los relacionados con el cálculo diferencial tratados en este material.

Para la elaboración y aplicación de acciones metodológicas se deben de tener en cuenta:

- Los contenidos de la matemática superior que reciben los estudiantes por años, según el plan de estudio de la carrera.
- El diseño del trabajo experimental de las asignaturas de la disciplina.
- La invariante de habilidades experimentales diseñada y aprobada por la disciplina.
- Los fundamentos de física general en los diferentes programas de las asignaturas de la disciplina.
- Los elementos básicos de la Informática educativa que reciben los estudiantes en los primeros años de la carrera.

El material presentado, satisface las necesidades de bibliografía especializada de la teoría de errores para llevar a cabo el trabajo experimental de la disciplina de Física General, permitiendo elevar la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de la misma, la preparación de estudiantes y profesores, así como en estos últimos permitirles contextualizar, acorde con sus posibilidades, recursos y condiciones de los estudiantes, los contenidos de la teoría de errores en el trabajo experimental.

En el orden investigativo, constituye un resultado del proyecto de investigación sobre Didáctica de las Ciencias Exactas en el Dpto. de Matemática-Física de la institución, que logra el diseño y confección de recursos didácticos sustentados en una concepción didáctica para el desarrollo coherente del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Ciencias Exactas.

REFERENCIAS

Portuondo, Duany, R. (1983). *Teoría de errores y procesamiento datos experimentales*. La Habana: Universidad de la Habana.

Pérez, Milanés, L. (2013). *La teoría de errores en el desarrollo del método experimental de la disciplina Física General en la carrera de Matemática-Física.* CD-ROMEvento Universidad 2014. Las Tunas: Universidad V.I. Lenin.

Pérez, Milanés, L. (2015). El experimento proyectado simultáneo con un sistema físico tradicional de bajo costo para comprobar la ley de Boyle-Mariotte. *Opuntia Brava,* 7 (2). Disponible en:http://10.22.1.55/index.php/numeros/2015/vol7num2/406-vol7num2art5

Quirantes, Sierra A. (2016-2017). *Teoría de errores. Apuntes de Física. Teoría de Errores.* España. Disponible en:http://www.ugr.es/~aquiran/docencia/apuntes/Apuntes%20Teor%C3%ADa%20de%20errores.pdf